回転型倒立振子の構造系と制御系の同時最適化設計

Simultaneous Optimal Design of Structure and Control System for Rotary Inverted Pendulum

学 渡辺 洋平(秋田高専) 正 木澤 悟(秋田高専)

Yohei Watanabe, Akita National College of Technology, 1-1, Bunkyo-cho, Iijima, Akita Satoru Kizawa, Akita National College of Technology, 1-1, Bunkyo-cho, Iijima, Akita

Key Words. Inverted Pendulum, Integrated Design, Pole Placement, Transient Response

1. はじめに

近年,構造/制御系の同時最適化による設計方法が建築構 造物や機械構造物に応用され,実際には制振機構(1)や片持 送水管,スマート構造に適用した例が報告されている.

一般的に同時最適化は目的関数に制御指標と構造系の指 標が2次形式評価関数で記述され拘束条件を付加して多目 的最適化問題として解かれている.

本研究では同時最適化の手法を利用し回転型倒立振子の 過渡応答の改善に応用した.特に過渡応答は閉ループ系の 極配置に依存することに着目し,制御性能を上げるための 最適な極配置と制御しやすい構造系つまり最適な振子の構 造寸法はどうあるべきかについて検討した.

2. 同時最適化の定式化

機械構造系の線形な運動方程式から導かれる状態方程式 を次式とする.

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \qquad y_p = C_p x_p \tag{1}$$

制御則には同一次元オブザーバを併合した状態フィードバ ック則としコントローラは次式となる.

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y_p \qquad u_k = C_k x_k \tag{2}$$

ただし,

$$A_k = A_p - HC_p - B_p K \quad B_p = H \quad C_k = -K$$

であり , H はオブザーバゲイン , K はフィードバックゲ インである.式(1)と式(2)の拡大系は

$$\dot{x}_g = A_g x_g$$
 $y_g = C_g x_g$ (3)
tete ,

$$A_{g} = \begin{bmatrix} A_{p} & B_{p}C_{k} \\ B_{k}C_{p} & A_{k} \end{bmatrix} \qquad C_{g} = \begin{bmatrix} C_{p} & 0 \end{bmatrix}$$

となる また 同時最適化の評価関数は制御性能のみとし, 構造系に関しては構造寸法の等式条件や不等式拘束条件で 拘束する.そこで,次式のスカラ評価関数を設定する.

$$J = \gamma_1 J_y + \gamma_2 J_u \tag{4}$$

 J_{y}, J_{y} はそれぞれ次式に示す制御性能,操作量に関する2 次形式評価関数である.

$$J_{y} = \int_{0}^{\infty} y_{g}^{T} y_{g} dt = x_{g}^{T}(0) P_{y} x_{g}(0)$$
(5)

$$J_{u} = \int_{0}^{\infty} u_{k}^{T} u_{k} dt = x_{g}^{T}(0) P_{u} x_{g}(0)$$
(6)

ここで ,
$$P_y$$
 , P_u は次式のリアプノフ方程式の解である

$$P_{y}A_{g} + A_{g}^{T}P_{y} = -Q_{y}$$
⁽⁷⁾

$$P_{u}A_{e} + A_{e}^{T}P_{u} = -Q_{u}$$
(8)

応答改善のための制約条件として閉ループ系の極配置を

$$p_i = \alpha_i \pm i\beta_i \tag{9}$$

と仮定しシステムの減衰性を高めるために式(10).(11)の扇 形領域を設定する.この領域を図示したものが図1である.

$$tan^{-1}\frac{|\beta_i|}{|\alpha_i|} < \theta_i \tag{10}$$

$$\alpha_i < const_i \tag{11}$$

オブザーバ併合型最適レギュレータはオブザーバがある無 しにかかわらず伝達関数行列が不変であり、このことは極 配置が定常特性には影響を与えないが過渡応答にだけ影響 を与えることを意味している.したがって,同時最適化の アルゴリズムとしては構造寸法の等式条件や不等式拘束条 件と,過渡応答を最適にする式(10)の制約の下で評価関数 (4)が最小になるように非線形最適化問題を数値的に解く Im, ことになる.





3. 回転型倒立振子モデルの設計例

3.1 モデルの導出

回転型倒立振子のモデルを図2に示す.このモデルの状 態方程式は次式となる.

$$\dot{x}_{p} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ E^{-1}A_{2} & E^{-1}A_{1} \end{bmatrix} x_{p} + \begin{bmatrix} 0 \\ E^{-1}B \end{bmatrix} \tau$$
(12)

$$E = \begin{bmatrix} I_0 + m_1 L_0^2 + m_0 a_0^2 & m_1 L_0 l_1 \\ m_1 L_0 l_1 & I_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix}$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} -C_0 & 0 \\ 0 & -C_1 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgl_1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
C a S .



2 Rotary Inverted Pendulum

3.2 設計例と結果

円形断面を有する振子の形状(直径 d₁ と振子長さ L₁)の最適化と過渡応答の改善に提案した同時最適化設計を適用する.構造上の不等式制約条件として

$$0.7d_{initial} < d_1 < 2d_{initial} \tag{13}$$

$$0.7L_{initial} < L_1 < 2L_{initial} \tag{14}$$

とし,等式条件としては次式の体積一定の条件を与える.

$$\frac{\pi d_1^2 L_1}{A} = V_{const} \tag{15}$$

次に,閉ループ系の極配置については,減衰性を高めるために不等式拘束条件を次の様に設定した.

$$tan^{-1} \frac{|\beta_i|}{|\alpha_i|} < \frac{\pi}{4}$$
 (*i* = 1,2) (16)

安定性を高めるために次式の制約を課すが,これを大きくし過ぎると操作量の負担になる.

$$\alpha_1 < -10 \qquad \alpha_2 < -15 \tag{17}$$

制御則は前述したオブザーバ併合の最適レギュレータを用 い極配置法で設計した.以上より同時最適化問題は式(13) ~(17)の拘束のもとに,評価値(4)が最小化されるように逐 次2次計画法で求めた.プログラムは MATLAB の Optimization ToolBox⁽²⁾の fmincon 関数を用いて数値計算 を行った.表1に評価関数,表2には設計パラメータの初 期値と最適値を示す.振子の形状は短く,径が大きくなる 傾向を示している.これは,できるだけ慣性モーメントを 小さくして制御をしやすくしているものと考えられる.シ ミュレーションはアーム角 $\theta_0 = 0(rad)$,振子角

表 1 Values of Performance Index

	J	Jy	Ju	
Initial	1.96	0.328	1.63	
Optimal	0.0894	0.0185	0.0709	

表 2 Optimal values of Design Parameters

Design	d ₁ (mm)	L1(m)	1	1	2	2
Initial	5	0.5	-5	11	-5	11
Optimal	5.97	0.35	-15	2.91	-10	1.93



図 3 Angle Response before the optimization



2 4 Angle Response after the optimization



1 5 Pole placement before the optimization



図 6 Pole placement after the optimization

4. おわりに

本研究では同時最適化の設計手法を回転型倒立振子に応 用した.数値解析結果から最適化することによりシステム の過渡特性が改善できることを示した.今後は,この結果 を実験的に検証する予定である.

参考文献

- (1) 安達, 坂本, 岩壺, 機論,67-653, C (2001-1), 118-124.
- (2) A. Grace , Optimization Toolbox User's Guide , (1992) , The Math Works, Inc.