

## 位相面解析

非線形要素の特性を近似的に線形化することなく、そのままの形で扱い、初期条件に対する非線形系の過渡応答を厳密に解析する方法。例えば解析手法として**等傾斜線法**という方法があるが、これは、例えば次の2次システムを考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1)$$

この式を変形すると

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2)$$

となる。さらに変形すると

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (3)$$

となり、これより

$$\dot{x} = -\frac{\omega_n^2}{m + 2\zeta\omega_n} x \quad \text{ただし, } m = \frac{d\dot{x}}{dx} \quad (4)$$

が得られる。ここで、 $m$  は  $x - \dot{x}$  位相面(phase plane)における軌道の傾斜であり、 $\frac{d\dot{x}}{dx}$  が一定である点の軌跡を等傾斜線(isocline)という。なお、式(4)は原点を通る直線で  $m$  の値を変化させて、これより、任意の初期値から描き始めて位相面軌道(phase plane trajectory)を描くことができる。

しかしながら、この手法は幾何的な作図作業が伴うので、やや作図が困難である。そこで、MATLAB を利用した数値解法を紹介する。

**例 題** 振子の長さ  $l$  の単端子系の運動方程式は摩擦等を見捨てれば次のような運動方程式で表現される。

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

ここで、 $l = 1[m]$ 、 $g = 9.8[m/s^2]$  とし

初期状態  $\theta(0) = 2.5\text{rad}$ 、 $\dot{\theta}(0) = 0\text{rad/s}$  とする。

このときの、自由振動の位相面図を描け。

運動方程式において、

$x_1 := \theta$ 、 $x_2 := \dot{\theta}$  とおくと、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{cases}$$

となる。この連立の1階の微分方程式を MATLAB を使って解き、 $x_1 - x_2$  の位相平面を plot させればよい。以下にプログラムの実行結果を示す。



