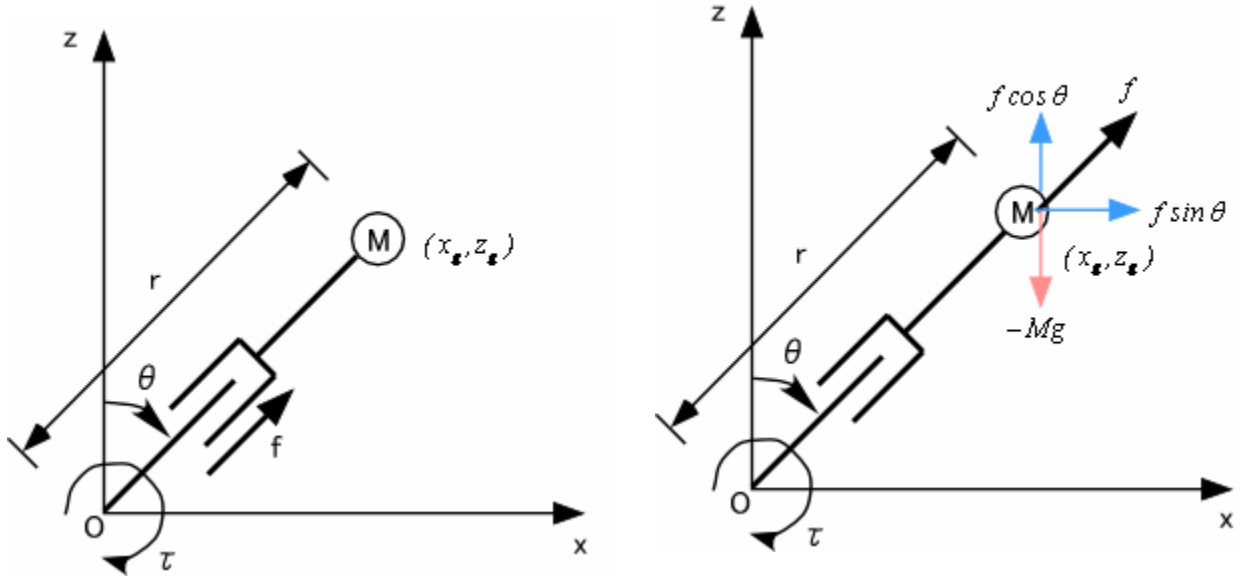


線形倒立振子 (Linear Inverted Pendulum)

ロボットの全質量が重心に集中していると仮定する．質点の質量 M ，足の長さ r ，さらにこの足は伸縮機構をもち，けり力 f を発生することが出来る．足首トルクは τ とする．このシステムは重心が正確に支点の真上になれば，必ず倒れる．そこで，けり力 f を調整することで重心の位置をキープすることを考える．



このシステムのダイナミクスをラグランジュの運動方程式を用いて導出する．
ラグランジュの運動方程式の一般形は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i \quad (1-1)$$

と表せる．リンクの重心位置は

$$\begin{cases} x_g = r \sin \theta \\ z_g = r \cos \theta \end{cases} \quad (1-2)$$

リンクの重心速度は

$$\begin{cases} \dot{x}_g = r \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z}_g = -r \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (1-3)$$

リンクの運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_g^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}_g^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 = \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 \quad (1-4)$$

位置エネルギーは

$$U = Mgr \cos \theta \quad (1-5)$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= Mr^2 \dot{\theta} & \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= Mr \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= Mr^2 \ddot{\theta} + 2M \dot{\theta} r \dot{r} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) &= M \ddot{r} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial T}{\partial r} &= Mr \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -Mgr \sin \theta & \frac{\partial U}{\partial r} &= Mg \cos \theta \end{aligned}$$

であるから，上式を eq.(1-1)に代入すると

$$\begin{cases} Mr^2 \ddot{\theta} + 2M \dot{\theta} r \dot{r} - Mgr \sin \theta = \tau \\ M \ddot{r} - Mr \dot{\theta}^2 + Mg \cos \theta = f \end{cases} \quad (1-6)$$

となり，これより

$$\begin{cases} r^2 \ddot{\theta} + 2r \dot{r} \dot{\theta} - gr \sin \theta = \frac{\tau}{M} \\ \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta = \frac{f}{M} \end{cases} \quad (1-7)$$

が得られる．ここで，足部は小さく，床面にも固定されておらず，ごく小さいトルクより発生できないと仮定し，このトルクを $\tau = 0$ とする．

次に，重力が足の伸縮力の鉛直成分に常に等しいために，重心が水平に運動することを考える．つまり，

$$f \cos \theta = Mg \quad (1-8)$$

が実現できるとする．これより，

$$f = \frac{Mg}{\cos \theta} \quad (1-9)$$

である．けり力の鉛直成分は重力と釣り合っており，水平成分だけが残っており，この場合の運動方程式は次式となる．

$$M \ddot{x} = f \sin \theta \quad (1-10)$$

eq. (1-10)に eq. (1-9)を代入すると

$$M \ddot{x} = \frac{Mg}{\cos \theta} \sin \theta = Mg \tan \theta = Mg \frac{x}{z} \quad (1-11)$$

これより，重心の水平方向に関する運動方程式は

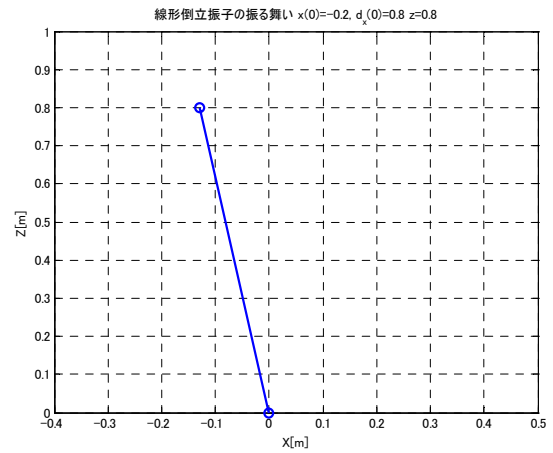
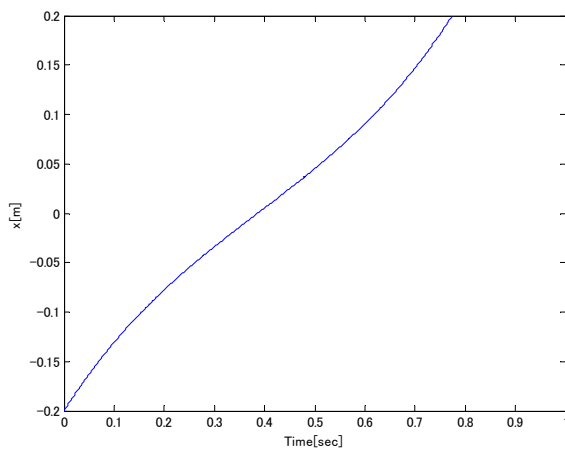
$$\ddot{x} = \frac{g}{z} x \quad (1-12)$$

となる．

ここで，この問題を MATLAB を使って数値的に解くことを考える．そこで，eq. (1-12)において $y_1 = x$ ， $y_2 = \dot{x}$ と置くと次式が得られる．

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{g}{z} y_1 \end{cases} \quad (1-13)$$

初期値は $[x(0), \dot{x}(0)] = [-0.2(m), 0.8(m/s)]$ とする．また，床からの高さは常に $z = 0.8[m]$ とする．このときの足の水平方向の時間応答とアニメーション以下に示す．



参考文献) 梶田秀司，線形倒立振子モードを規範とする動的2足歩行ロボットの実時間制御，機械技術研究所報告第171号，1996