

環状切欠き部の組合せ応力集中係数と 塑性拘束係数について

佐川 健太郎*・宮野 泰治・安藤 正昭

Combined Stress Concentration Factor and Plastic Constraint Factor at Circular Notch Section

Kentarō SAGAWA*, Taiji MIYANO and Masaaki ANDO

(2003年12月15日受理)

On the case of two or three dimensional stress concentration, evaluation of notch sharpness are represented by combined stress concentration factor (α') and plastic constraint factor (L) other than by stress concentration factor (α). However, very few data about combined stress concentration factor (α') and plastic constraint factor (L) are found, although abundant data of stress concentration factor (α). Therefore, it has apparently not been published reports of discussing notch effects for combined stress concentration factor (α') and plastic constraint factor (L).

This report refers to our proposition of stress analyze on various shapes of circular notch which are axially loaded. Stress concentration factor (α), combined stress concentration factor (α') and constraint factor (L) have been calculated by means of finite-element analysis programs and provided the informal equation to estimate rough value of combined stress concentration factor (α') and plastic constraint factor (L) from stress concentration factor (α) on relation of them. For instance, estimation of impact tensile strength for circular notched specimen were expressed by α , α' and L, and our trial was appraised for evaluation of notch effects.

1. 緒言

部材切欠き部の切欠きの鋭さ、すなわち、切欠き部での応力集中の程度を評価する尺度としては、一般に、一次元、二次元、三次元応力集中の各場合とも、応力集中係数 α が用いられている。

ところで、二次元、三次元応力集中の場合には、応力集中係数 α の他に、塑性拘束係数 L ¹⁾や組合せ応力集中係数 α' ²⁾の概念がある。しかし、種々の切欠き形状に対して、 α の資料は極めて豊富であるが、 L と α' に関する資料、あるいは、破壊強度におよぼす切欠きの影響を L や α' で評価している研究報告はほとんど見当たらない。また、 α と L あるいは α' の間にどのような関係があるかも不明である。

本報告は、軸荷重を荷した種々の環状切欠き形状についての応力解析を有限要素法によって行い、 α , L , α' を求めて、それらの間の関係を考察し、 α の資料から L や α' の大略の値を求めようとする簡便式の提案を試みたものである。また、炭素鋼切欠き材の衝撃引張強度の一例⁶⁾について、切欠きの影響を α , L および α' で評価して、それぞれの切欠き効果の評価尺度としての特性を検討した。

2. 塑性拘束係数 L と組合せ 応力集中係数 α' について

組合せ応力状態にある材料中のある点における主応力が $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ であるとき、その点が弾性破損を起こす(降伏する)限界値は式(1)で与えられる σ_{eq} の値が単軸応力の降伏応力 σ_{ys} (引張試験で測定さ

* 秋田高専専攻科学生

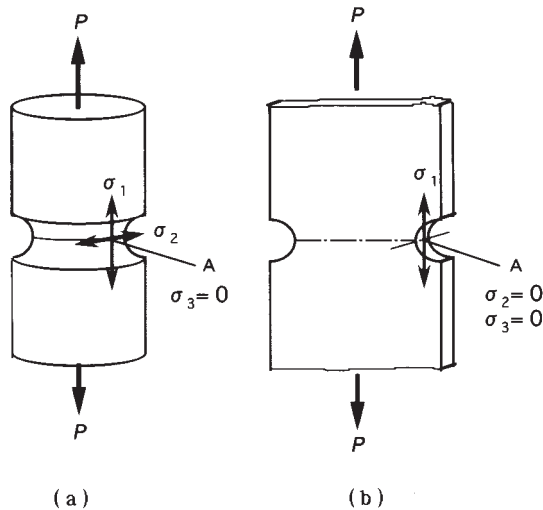


図1 切欠き底の主応力

れる降伏応力)に達するときである (von Mises の降伏条件).

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \dots\dots(1)$$

σ_{eq} を相当応力と称す. この σ_{eq} の概念は組合せ応力のときの弾性強度を最大主応力 σ_1 のみで決定するのではなく, 他の中間主応力 σ_2 , 最小主応力 σ_3 も共同関与させた考え方である.

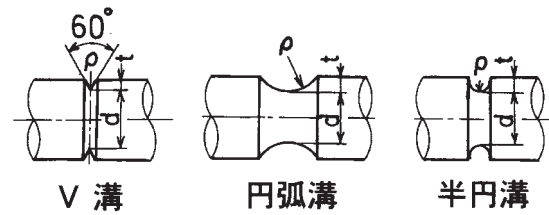
さて, 図1の (a) のような環状切欠き材と, (b) のような板状切欠き材が軸荷重を受けるとき, 切欠き底 A の軸方向に最大主応力 σ_1 が発生するが, その点 A での他の主応力の様相は異なる. (a) では円周方向に σ_2 が発生し, 半径方向の σ_3 は 0 である二次元応力集中であるが, (b) では, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ となり一次元応力集中である.

一般に言う応力集中係数 α とは, 最大応力点 A における $\sigma_1 = (\sigma_y)_{max}$ だけに着目し, これを, 切欠き底断面の公称応力 σ_o で割った値, すなわち次式 (2) で定義されたものである.

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_o} = \frac{(\sigma_y)_{max}}{\sigma_o} \quad \dots\dots(2)$$

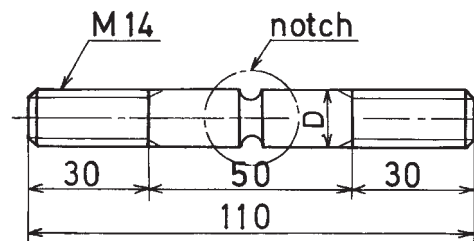
組合せ応力集中係数 (または組合せ係数) α' とは, 最大応力点 A における相当応力 σ_{eq} を切欠き底断面の公称応力 σ_o で割った値, すなわち次式 (3) で定義される値である²⁾.

$$\alpha' = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_o} \quad \dots\dots(3)$$



試験片	d (mm)	ρ (mm)	D (mm)	t (mm)	
V溝	v-1	10	3	20	5
	v-2	10	1.5	20	5
	v-3	10	0.8	20	5
	v-4	10	0.5	20	5
	v-5	9	0.286	14	2.5
	v-6	10	0.3	20	5
	v-7	10	0.286	14	2
円弧溝	R-1	10	50	14	2
	R-2	9	37.5	14	2.5
	R-3	10	10	14	2
	R-4	10	7	14	2
	R-5	9	6	14	2.5
	R-6	10	5	14	2
	R-7	10	4	14	2
	R-8	9	2	14	2.5
半円溝	C-1	10	2	14	2
	C-2	10	1.6	13.2	1.6
	C-3	10	1.2	12.4	1.2
	C-4	10	0.8	11.6	0.8
	C-5	10	0.4	10.8	0.4
	C-6	10	0.2	10.4	0.2

(a) 切欠きの形状寸法



(b) 単一衝撃引張試験片

図2 環状切欠きの形状寸法

図1(b)の板状切欠き材は一次元応力集中であるから, $\sigma_{eq} = \sigma_1$ となり, $\alpha' = \alpha$ であるが, 図1(a)の環状切欠き材の二次元応力集中では, 相当応力が式(4)となるから, α' は式(5)のようになる.

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad \dots\dots(4)$$

環状切欠き部の組合せ応力集中係数と塑性拘束係数について

$$\alpha = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_o} = \frac{1}{\sigma_o} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

$$= \frac{\sigma_1}{\sigma_o} \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} = \alpha' \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}$$

.....(5)

つぎに、塑性拘束係数 L とは、相当応力 σ_{eq} が単軸応力の降伏応力 σ_{ys} に達するときの最大主応力 σ_1 と $\sigma_{eq} = \sigma_{ys}$ の比、すなわち、式(6) で定義される値である¹⁾。

$$L = \frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} \quad \text{.....(6)}$$

この L の概念を用いれば、組合せ応力状態にある点の弾性破損（降伏）は、最大主応力 σ_1 の値が単軸応力での降伏応力 σ_{ys} （引張試験で測定される降伏応力）の L 倍に達するときということになる。すなわち $\sigma_1 = L \cdot \sigma_{ys}$ のとき弾性破損が起ることに

なる。

いま、式(6) に式(2) と (3) を代入すると、次式(7) が得られる。

$$L = \frac{\alpha}{\alpha'} \quad \text{.....(7)}$$

すなわち、L は α と α' の比の値となっている。

3. 有限要素法による応力解析

解析対象モデルとした、環状切欠きの形状寸法を、図 2 (a) に示す。ここで、試験片の V-7, R-2, R-5, R-8 は同図(b) に示す炭素鋼切欠き材の単一衝撃引張強度試験に用いられた試験片⁶⁾ と同一形状の切欠きである。

解析に用いたプログラムは ANSYS/ED であり、試験片形状の対称性を考慮し、試験片の 1/4 をモデル化し、8 節点アイソパラメトリック要素を用いた。荷重条件は、切欠き底断面の公称応力が 100MPa と

表 1 α, α', L の解析結果

試験片	d (mm)	ρ (mm)	ρ/d	α				L	α'	
				材料学会 ³⁾	式(8) ⁵⁾	野田ら ⁴⁾	本報			
V 溝	V-1	10	3	0.300	1.59	1.22	1.66	1.650	1.094	1.508
	V-2	10	1.5	0.150	2.03	1.73	2.15	2.003	1.101	1.819
	V-3	10	0.8	0.080	2.58	2.37	2.82	2.590	1.114	2.325
	V-4	10	0.5	0.050	3.05	3.00	3.50	3.073	1.115	2.756
	V-5	9	0.286	0.032	—	3.83	4.20	4.163	1.128	3.690
	V-6	10	0.3	0.030	4.02	3.87	4.42	3.975	1.123	3.540
	V-7	10	0.286	0.029	—	4.08	4.27	4.243	1.126	3.768
円弧溝	R-1	10	50	5.000	1.04		1.04	1.048	1.016	1.031
	R-2	9	37.5	4.167	1.05		1.05	1.052	1.017	1.034
	R-3	10	10	1.000	1.20		1.22	1.234	1.054	1.171
	R-4	10	7	0.700	1.32		1.32	1.324	1.067	1.241
	R-5	9	6	0.667	1.28		1.33	1.335	1.065	1.254
	R-6	10	5	0.500	1.48		1.43	1.440	1.080	1.333
	R-7	10	4	0.400	1.50		1.53	1.509	1.079	1.399
	R-8	9	2	0.222	1.73		1.85	1.700	1.084	1.568
半円溝	C-1	10	2	0.200	1.78		1.91	1.777	1.090	1.630
	C-2	10	1.6	0.160	1.90		2.05	1.858	1.087	1.709
	C-3	10	1.2	0.120	2.07		2.22	2.059	1.095	1.880
	C-4	10	0.8	0.080	2.30		2.43	2.341	1.100	2.128
	C-5	10	0.4	0.040	2.62		2.70	2.606	1.097	2.376
	C-6	10	0.2	0.020	2.80		2.88	2.818	1.096	2.571

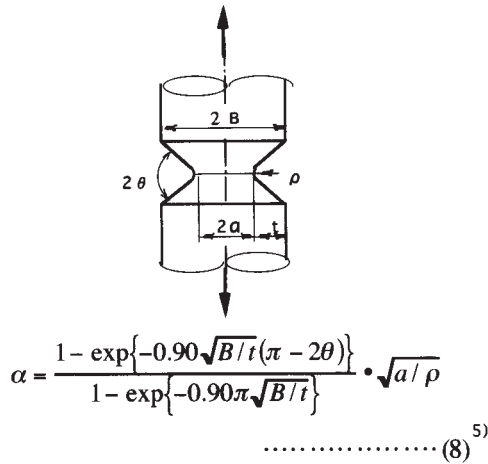


図3 V溝の応力集中係数

なるような値の引張荷重を平滑部端面に負荷し、その端部の軸応力が一樣になるようにカップリングを行った。また、ヤング率は $E=200\text{GPa}$ 、ポアソン比は $\nu=0.3$ とした。

4. 結果および考察

4・1 解析結果の検証

本報の応力解析結果により得られた各環状切欠き形状の応力集中係数 α を表1に示す。同表には、比較のために、日本材料学会編³⁾による α 、野田ら⁴⁾による α 、また、V溝については、図3に示す式(8)⁵⁾による α も示してある。

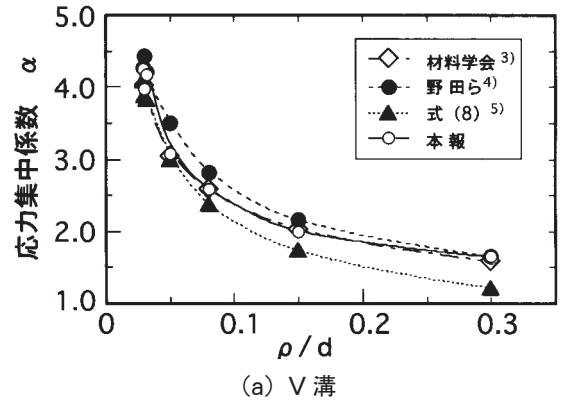
これらの各 α を、横軸に ρ/d をとって比較すると、図4のようになる。図にみるように、それぞれの文献による α には、多少の誤差がある。本報の α の傾向は、V溝、円弧溝および半円溝とも材料学会編の α に近似していることがわかる。したがって、本報告での ANSYS による解析結果には問題がないものとして、以後の検討を行った。

4・2 降伏開始荷重と降伏開始公称応力について

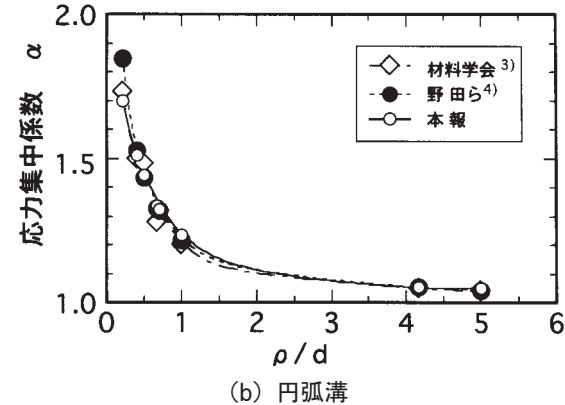
図5に示すような、断面積 A_0 の平滑丸棒の降伏開始荷重を P_s 、降伏応力を σ_{ys} (単軸応力の降伏応力) とする。また、切欠き底断面積が A_0 で、応力集中係数、塑性降伏係数、組合せ応力集中係数のそれぞれが、 α 、 L 、 a' である環状切欠き付丸棒の降伏開始荷重を P' 、このときの公称応力 (降伏開始公称応力) を σ_0 ($=P'/A_0$) とする。 P' と P_s および σ_0 と σ_{ys} の関係を検討する。

P_s は次式(9)で表される。

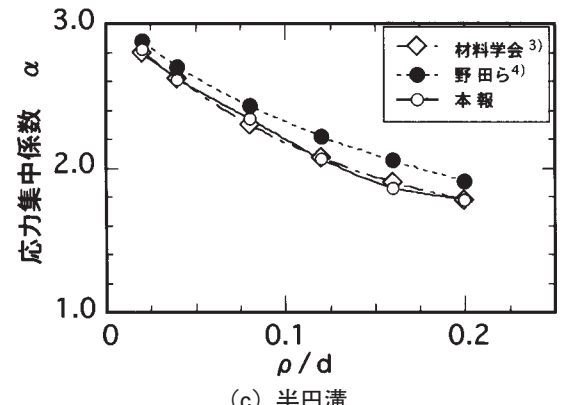
$$P_s = A_0 \cdot \sigma_{ys} \quad \dots\dots(9)$$



(a) V溝

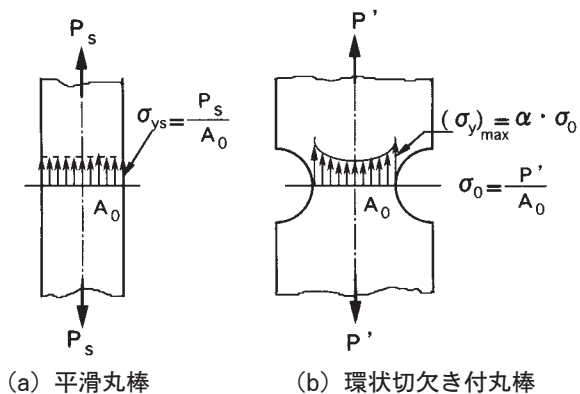


(b) 円弧溝



(c) 半円溝

図4 応力集中係数 α の比較



(a) 平滑丸棒 (b) 環状切欠き付丸棒

図5 降伏開始荷重

P'は、切欠き底の相当応力 σ_{eq} が、 $\sigma_{eq} = \sigma_{ys}$ となるときの荷重である。図6 (b) において、軸荷重 P' のときの切欠き底の軸方向応力を $(\sigma_y)_{max}$ とすると、 $(\sigma_y)_{max}$ は次式(10) で表される。

$$(\sigma_y)_{max} = \alpha \cdot \sigma_o = \alpha \cdot \frac{P'}{A_o} \quad \dots\dots(10)$$

切欠き底では、 $\sigma_1 = (\sigma_y)_{max}$ であるから、2章の式(6)より、Lは式(11) で表される。

$$L = \frac{(\sigma_y)_{max}}{\sigma_{eq}} = \frac{(\sigma_y)_{max}}{\sigma_{ys}} \quad \dots\dots(11)$$

式(9)、(10)、(11) および 2章の式(7) より、式(12) および (13) が得られる。

$$P' = \frac{L}{\alpha} P_s = \frac{1}{\alpha'} P_s \quad \dots\dots(12)$$

$$\sigma_o = \frac{L}{\alpha} \sigma_{ys} = \frac{1}{\alpha'} \sigma_{ys} \quad \dots\dots(13)$$

式(12) および (13) より、 α 、L、 α' の環状切欠きを有する丸棒の降伏開始荷重は平滑丸棒の L/α 倍、あるいは $1/\alpha'$ 倍となること、そして、そのときの公称応力 σ_o もまた、 σ_{ys} の L/α 倍、あるいは、 $1/\alpha'$ 倍であることがわかる。ただし、 P_s は平滑丸棒の断面全体が降伏する荷重であるが、P' は切欠き底の最大応力部の降伏開始荷重であり、切欠き底断面全体が降伏する荷重ではない。なお、表1より $L/\alpha = 1/\alpha'$ は常に1以下となっていることがわかる。

4・3 α と α' 、L の間の関係について

本報での結果による表1の α と α' の関係を両対

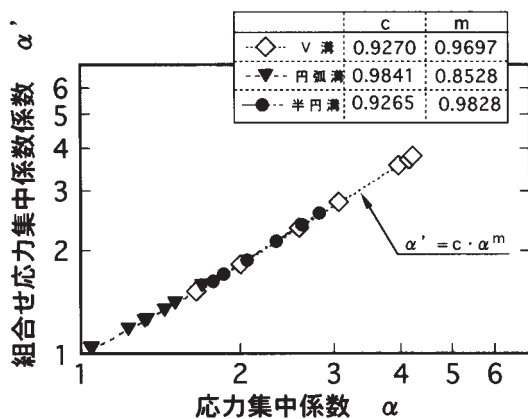


図6 α と α' の関係

数グラフで表すと、図6に示すように、大略で直線関係になる。したがって、 α と α' の関係を式(14) のような回帰式で表すことができる。ここで、c と m は、切欠き形状の種類と材質（ヤング率やポアソン比）によって定まる定数と考えられる。

$$\alpha' = c \cdot \alpha^m \quad \dots\dots(14)$$

本報での範囲内で、最小二乗法により c と m を求めると、V溝、円弧溝、半円溝のそれぞれに対して、図6の図中に示すような値が得られた。

つぎに、 α と L の関係を図示すると、図7のようになる。図に見るように、 α の大きさが1.8程度を境にして様相が大きく異なることが認められる。 $\alpha = 1.8$ 程度までは、 α の上昇に伴い L の上昇も顕著であるが、1.8を越えると L の増加は極めて鈍くなり飽和していくような傾向がみられる。すなわち、 α では大差のある切欠きでも、それらの L では、小差の近接した値となっている。また、V溝と円弧溝にみるように、切欠き形状の種類により α が同じ値でも L の値は異なっていることが明瞭に認められる。式(7) と式(14) から α' を消去すれば次式(15) が得られる。

$$L = \frac{1}{c} \cdot \alpha^{(1-m)} \quad \dots\dots(15)$$

図7の中に図示している曲線とその式は、図6に示した c と m の値を用いて、式(15) を表したものである。c と m の値が切欠き形状の種類に依存するのは、 σ_1 が同じ値でも、 σ_2 、 σ_3 は切欠き形状の種類でそれぞれ異なること、すなわち、 σ_{eq} が異なることに関連しているものと思われる。

式(14)、式(15) を適用すれば、 α の値がわかる環状切欠き材の α' と L の大略の値は簡単に推定できることになる。

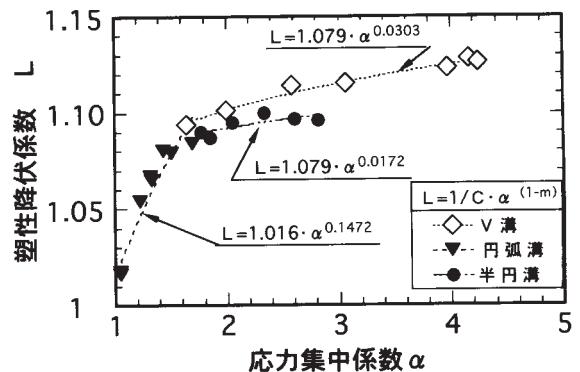
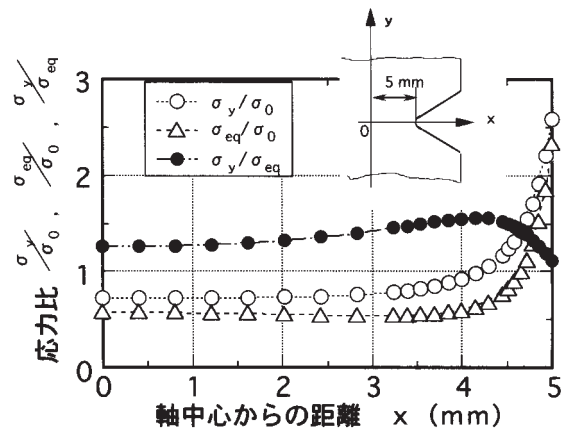


図7 α と L の関係

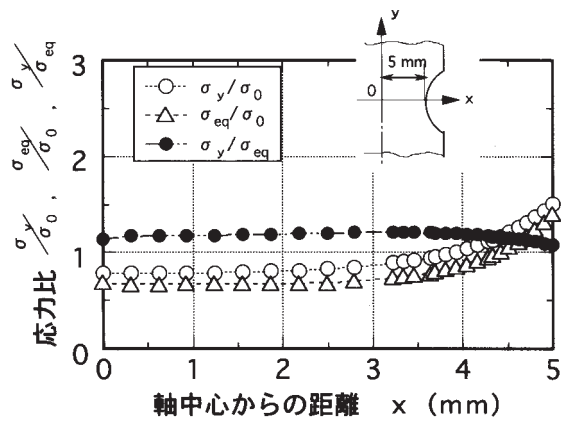
4・4 切欠き部最小横断面の応力分布の様相

切欠き底横断面に発生する，軸応力 σ_y ，相当応力 σ_{eq} の分布状態の様相の一例を図8に示す．図の縦軸は， σ_y/σ_0 ， σ_{eq}/σ_0 および σ_y/σ_{eq} と無次元化されており（ σ_0 は公称応力），横軸は軸中心から切欠き底までの半径距離である．

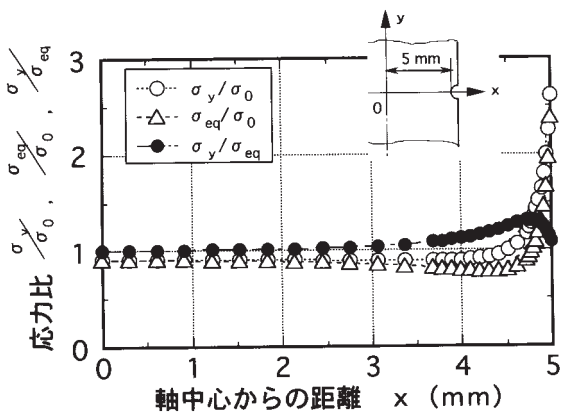
図において，軸中心から5mmの位置，すなわ



(a) V溝 (V-3 : $\alpha=2.590$, $\alpha'=2.325$, $L=1.114$)



(b) 円弧溝 (R-7 : $\alpha=1.509$, $\alpha'=1.399$, $L=1.509$)



(c) 半円溝 (C-5 : $\alpha=2.606$, $\alpha'=2.376$, $L=1.097$)

図8 切欠き部最小断面の応力分布の様相

ち，切欠き底での $(\sigma_y)_{max}/\sigma_0$ ， $(\sigma_{eq})_{max}/\sigma_0$ ，および $(\sigma_y)_{max}/(\sigma_{eq})_{max}$ のそれぞれは，各切欠きの α ， α' および L を表すことになる．図にみるように，軸中心から切欠き底までの距離の80%に相当する4mm付近を過ぎてから， σ_y ， σ_{eq} は急激に上昇し， σ_y/σ_{eq} は下降する傾向は全ての切欠きに共通して認められた．また，図の(a)と(c)にみるように， α の値はほぼ等しくても，内部での σ_y ， σ_{eq} の値や様相は，切欠き形状の種類に依存して，かなり異なっていることがわかった．

4・5 単一衝撃引張強度におよぼす切欠き効果

前に報告した炭素鋼切欠き材の単一衝撃引張強度の実験結果⁶⁾を一例にとり，低温脆性におよぼす切欠き効果を α ， L ， α' のそれぞれで評価して，切欠き効果の評価尺度としての特性を検討する．

図9は，試験片V-7，R-2，R-5，R-8の，単一衝撃引張破断での，試験片温度と比吸収エネルギーの関係調べた実験結果である⁶⁾．また表2は，各温度レベルでの比吸収エネルギー値の傾向を，図9の比エネルギー遷移曲線から推定して u_t とし， u_t と試験片R-2（前報では $\alpha=1.05$ ）の20℃における比吸収エネルギー u_0 との比を検討した結果である⁶⁾．ただし，本報に基づいて，各試験片の α は改められ， L と α' が追記されている．なお，ここでの u_t/u_0 の概念は，試験片R-2を平滑材とみなして，その室温20℃での衝撃強度（比吸収エネルギー u_0 ）に対比しての，切欠きの鋭さと低温の影響に起因した衝撃強度（比

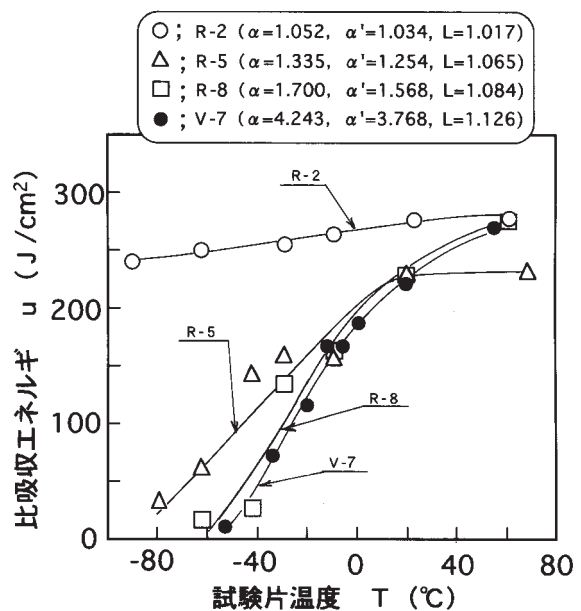


図9 温度と比呼吸エネルギーの関係

環状切欠き部の組合せ応力集中係数と塑性拘束係数について

表 2 衝撃引張破断における比呼吸エネルギーの実験結果⁶⁾

試験片温度 T (°C)	R-2		R-5		R-8		V-7	
	$\alpha = 1.052$		$\alpha = 1.335$		$\alpha = 1.700$		$\alpha = 4.243$	
	$\alpha' = 1.034$		$\alpha' = 1.254$		$\alpha' = 1.568$		$\alpha' = 3.768$	
	L = 1.017		L = 1.065		L = 1.084		L = 1.126	
	U_t (J/cm ²)	U_t/U_0	U_t (J/cm ²)	U_t/U_0	U_t (J/cm ²)	U_t/U_0	U_t (J/cm ²)	U_t/U_0
20	$U_0 = 276$	1.00	229	0.83	229	0.83	224	0.81
-9	263	0.95	190	0.69	175	0.63	164	0.59
-29	255	0.92	142	0.51	115	0.42	90	0.33
-42	251	0.91	106	0.38	36	0.13	25	0.09
-52	249	0.90	83	0.30	20	0.07	12	0.04
-62	249	0.90	62	0.22	17	0.06	—	—
-79	242	0.88	33	0.12	—	—	—	—

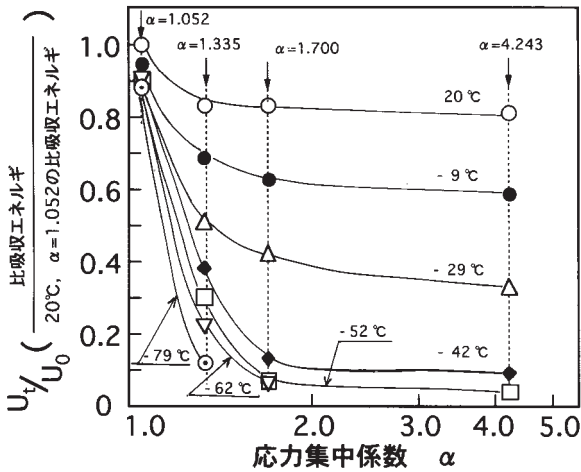


図10 U_t/U_0 と応力集中係数の関係

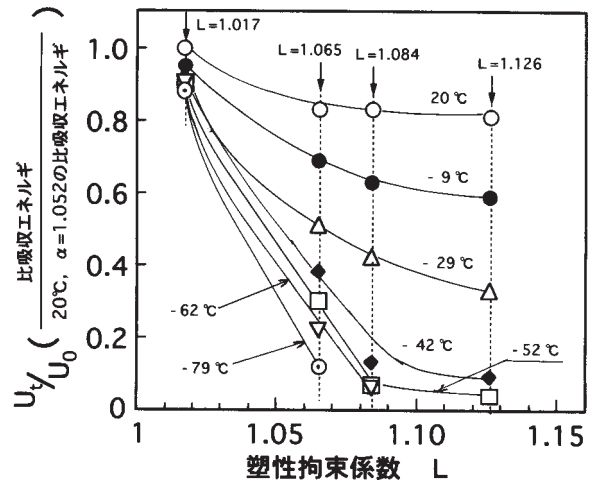


図12 U_t/U_0 と塑性拘束係数の関係

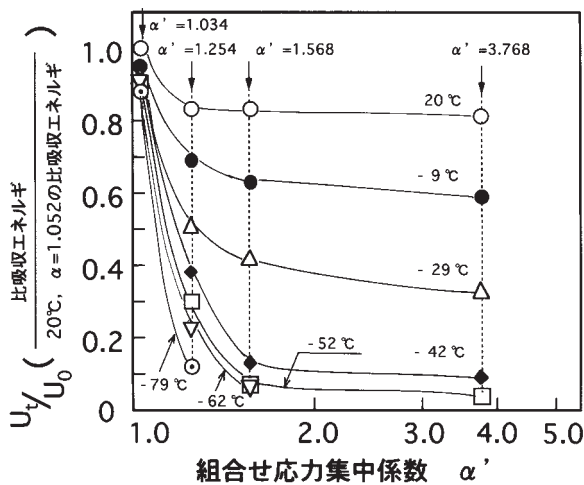


図11 U_t/U_0 と組合せ応力集中係数の関係

吸収エネルギー値)の低下割合である。

u_t/u_0 と α , α' および L の関係を、試験片温度をパラメータにとって、図10, 11, 12に示した。これら各図から衝撃強度の切欠き効果をそれぞれ α , α' , L で評価し検討を試みる。

図10では：衝撃強度は平滑材に準ずるものとした $\alpha = 1.052$ の切欠きの場合、温度の低下に伴って、わずかに低下する程度で、温度の影響は小さいが、 $\alpha = 1.7$ 以上の切欠きになると温度条件に鋭敏になる。そして、低温では、 $\alpha = 1.7$ 程度までは α の上昇に伴い、($\alpha = 1.3$ 程度までは急激に、その後は徐々に緩やかに) 衝撃強度は低下していくが、 $\alpha = 1.7$ 以上になると α の大きさによる影響はきわめて鈍くなり、衝撃強度に大きな差異は認められないようになる。また、室温では、切欠きが $\alpha = 1.335$ 以上に

なれば、 α の大きさによる衝撃強度の差異は認められない。

図11では： α' と衝撃強度の関係の一般的な傾向は、図10の α と衝撃強度の関係の一般的傾向と、ほとんど同様である。

図12では：室温では切欠きがあれば平滑材より衝撃強度は低下するが、切欠きのLの大小での衝撃強度の差異はほとんどみられない。低温では、一般的傾向として、Lの上昇に伴って衝撃強度も低下して行く。

以上のような考察から、 $\alpha=1.7$ （あるいは $\alpha'=1.568$ ）と $\alpha=4.243$ （あるいは $\alpha'=3.768$ ）のように、切欠きの（鋭さの）程度を α や α' で評価すれば大差の切欠き条件であっても、それらの切欠きをLで評価すれば、1.084と1.126のように近接した値の切欠き条件となるという特性があることがわかった。また、低温での単一衝撃引張強度の切欠き効果としては、切欠きの（鋭さの）程度をLで評価したほうが良いように思われた。

4. 結 言

有限要素法により、引張荷重を負荷した種々の環状切欠き形状について、応力解析を行い、応力集中係数 α 、塑性拘束係数L、組合せ応力集中係数 α' を求めて、それらの間の関係を考察した。また、炭素鋼切欠き材の衝撃引張強度の一例を α 、Lおよび α' で評価して、それぞれの切欠き効果の評価尺度としての特性を検討した。

得られた主な結果はつぎのとおりである。

(1) 切欠き底の降伏開始荷重と公称応力を与える式を示した。

(2) α と α' は、両対数グラフで、ほぼ、直線関係関係になることから、 α と α' の回帰式(14)を提案した。また、 α とLの関係式(15)を提案した。

(3) α が1.8程度までは α の増加に伴いLも増加するが、 α が1.8程度を過ぎるとLの増加は鈍り、飽和して行くような傾向になる。

(4) したがって、切欠きの程度を、 α や α' で評価すれば大差の切欠き条件であっても、それらの切欠きをLで評価すれば近接した値の切欠き条件ということになる。

(5) 低温での単一衝撃引張強度の切欠き効果は、切欠きの程度をLで評価したほうが良いと思われた。

参 考 文 献

- 1) 村上裕則, 大南正瑛, 破壊力学入門, オーム社, 107 (1981)
- 2) 西田正孝, 応力集中, 森北出版, 55 (1967)
- 3) 日本材料学会編, 疲れ試験便覧, 養賢堂, 24 (1968)
- 4) 野田尚昭, 西谷弘信, 高瀬康, 篠崎正孝, 日本機械学会論文集, A-63, 104 (1997)
- 5) 西田正孝, 応力集中, 森北出版, 105 (1967)
- 6) 斎藤, 宮野, ほか2名, 秋田高専研究紀要, 19, 1 (1984)