

2 方向に直線的に変化するせん断流の中に置かれた翼の揚力線理論

石木田 直 俊*・伊 藤 惇

Lifting-Line Theory of a Wing placed in Shear Flow whose velocity linearly changes in two directions.

Naotoshi ISHIKIDA* and Jun ITO

(2004年11月30日受理)

As the most fundamental flow between two parallel plates, the case which a main stream velocity distribution linearly changes in both directions normal to the wing surface and along the span is treated.

A Lifting-Line theory is developed for the wing placed in such two-dimensional shear flow and effects of shear parameter of the main stream, aspect ratio and taper ratio on three dimensional wing characteristics are clarified, based on the theory.

1. 緒 言

軸流機械の羽根車や案内羽根のまわりの流れは、ケーシングとハブあるいは内筒の間すなわち二つの平行な壁面間内の流れになっている。またその流れは両側壁の境界層や、前に置かれた翼の後流または翼列の翼間の噴流など様々なタイプのせん断流になっている。したがって、これらの羽根の合理的設計法や性能評価法をより向上させるためには「平行2平面間に生じたせん断流中の翼の研究」を行うことが基礎的に重要であると考えられる。

このような背景から、せん断流中の翼の特性を明らかにしようとした研究がいくつか見られる^(1~8)が、本研究では平行2平面間を流れる最も基本的な流れとして主流の速度分布が翼幅方向と翼面に垂直な上下方向の両方向に直線的に変化する場合を取り扱う。このような二次元せん断流の中に置かれた翼に対して揚力線理論を展開し、これに基づいて三次元翼特性に及ぼす主流のシアパラメータ、アスペクト比及び翼テーパ比の影響を明らかにする。

2. 運動方程式

間隔 H の平行2平面間は、図1に示すような流速 $U(y, z)$ なるせん断流になっており、弦長分布 $c(y)$ なる三次元翼が翼端で両平面に接しかつ迎角 α で配置されている。非粘性・非圧縮性流れおよび微小じょう乱の仮定を行うと、図1の座標においてじょう乱圧力 p に対して次の運動方程式が成り立つ⁽⁹⁾。

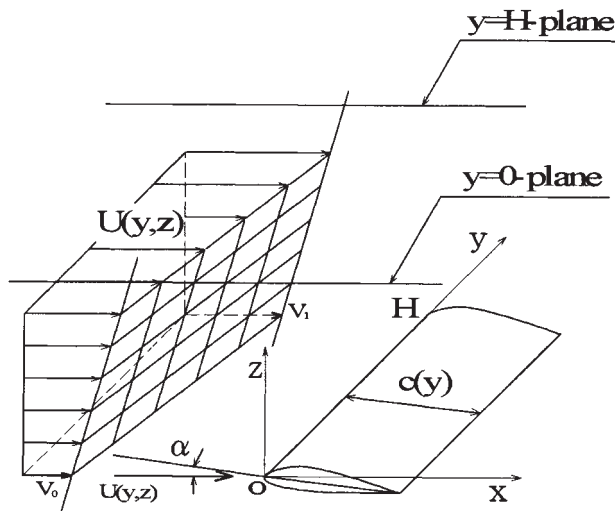


図1. 二次元せん断流中の三次元翼

* 秋田高専専攻科学生

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + U^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + U^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots (1)$$

翼を揚力線で近似することにより、基本解を次のように表すことが出来る⁽⁹⁾。

$$p = P(y, z; \nu) \cos \nu x \quad \dots (2)$$

ここで ν は任意の実数である。

P および U は、次のように表されるものと仮定する。

$$P(y, z; 0) = Y(y)Z(z) \quad \dots (3)$$

$$U(y, z) = V(y)W(z) \quad \dots (4)$$

式(3), (4)を式(1)に代入すると、次の二つの常微分方程式が成立する。

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{2}{V} \frac{dV}{dy} \frac{dY}{dy} + \mu^2 Y = 0 \quad \dots (5)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2}{W} \frac{dW}{dz} \frac{dZ}{dz} - \mu^2 Z = 0 \quad \dots (6)$$

ここで、 μ は分離定数であり、離散的な値をとる(以下、この第2章ではこれを μ_n とする)。

主流の速度分布は次のように表されるものと仮定する。

$$V(y) = V_0 + \frac{V_1 - V_0}{H} y \quad \dots (7)$$

$$W(z) = 1 + kz \quad \dots (8)$$

ここで、 k は翼面に垂直な上下方向のシアパラメータである。また、境界条件は次のように与えられる。

$$\frac{dY}{dy} = 0 \quad \text{at } y = 0, H \quad \dots (9)$$

$$Z = 0 \quad \text{at } z \rightarrow \infty \quad \dots (10)$$

3. 関数 $Z(z)$ の解析

式(6)(8)より $Z(z)$ に関する微分方程式として次式が成り立つ。

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{2k}{1+kz} \frac{dZ}{dz} - \mu^2 Z = 0 \quad \dots (11)$$

ここで、式(11)を解くために、 Z を2つの変数 u, v の積で表す。

$$Z = uv \quad \dots (12)$$

式(12)を式(11)に代入すると式(11)の各項は、それぞれ式(13)(14)(15)のようになる。

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{d^2 u}{dz^2} v + 2 \frac{du}{dz} \frac{dv}{dz} + u \frac{d^2 v}{dz^2} \quad \dots (13)$$

$$\frac{2k}{1+kz} \frac{dZ}{dz} = \frac{2k}{1+kz} \left(\frac{du}{dz} v + u \frac{dv}{dz} \right) \quad \dots (14)$$

$$\mu^2 Z = \mu^2 uv \quad \dots (15)$$

式(13)(14)(15)を式(11)に代入し、変形すると、

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left\{ \frac{2}{u} \frac{du}{dz} - \frac{2k}{1+kz} \right\} \frac{dv}{dz} + \left\{ \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{2k}{u(1+kz)} \frac{du}{dz} - \mu^2 \right\} v = 0 \quad \dots (16)$$

式(16)の第2項を零とおく。すなわち、

$$\frac{2}{u} \frac{du}{dz} - \frac{2k}{1+kz} = 0 \quad \dots (17)$$

これを解くと、

$$u = C(1+kz) \quad \dots (18)$$

ここで C は積分定数である。式(18)の1次、2次の導関数を求め、式(17)(18)を用いると式(16)は次のようになる。

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \left\{ \frac{2k^2}{(1+kz)^2} + \mu^2 \right\} v = 0 \quad \dots (19)$$

いま無限遠方では、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2k^2}{(1+kz)^2} = 0 \quad \dots (20)$$

となるので、次式が成立する。

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \mu^2 v = 0 \quad \dots (21)$$

式(21)の一般解は、

$$v = C_1 e^{\mu z} + C_2 e^{-\mu z} \quad \dots (22)$$

式(22)において $z \rightarrow \infty$ では $v \neq \infty$ より $C_1 = 0$ となる。よって、

$$v = C_2 e^{-\mu z} \quad \dots (23)$$

以上より a_0, a_1 を未知定数として v は次のように置くことができる。

$$v = e^{-\mu z} \left(a_0 + \frac{a_1 k}{1+kz} \right) \quad \dots (24)$$

$a_1 = \frac{a_0}{\mu}$ が成立することから式(24)は、

$$v = a_0 e^{-\mu z} \left(1 + \frac{k}{\mu(1+kz)} \right) \quad \dots (25)$$

式(12)に式(18)式(25)を代入し、 $a_0 C = f$ とすると最終的に Z は次のようになる。

$$Z = f e^{-\mu z} \left\{ (1+kz) + \frac{k}{\mu} \right\} \quad \dots (26)$$

4. 関数 $Y(y)$ の解析⁽⁸⁾

Y 方向の微分方程式(5)に y 方向の速度分布の式(7)を代入すると次式が成り立つ。

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + 2 \frac{V_1 - V_0}{V_0 H + (V_1 - V_0)y} \frac{dY(y)}{dy} + \mu^2 Y(y) = 0 \quad \dots (27)$$

ここで第2項を零とおく。すなわち、

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \mu^2 Y(y) = 0 \quad \dots (28)$$

この微分方程式の一般解は

$$Y(y) = C_3 \cos(\mu y) + C_4 \sin(\mu y) \quad \dots (29)$$

となる。これを y で微分し、ダッシュで表示すると、

$$Y'(y) = C_3' \cos(\mu y) - C_3 \mu \sin(\mu y) + C_4' \sin(\mu y) + C_4 \mu \cos(\mu y) \quad \dots (30)$$

となり、境界条件式(9)の $y=0$ の場合より $C_4 = -\frac{C_3'}{\mu}$ が成立し、式(29)より $Y(y)$ は次のようになる。

$$Y(y) = C_3 \cos(\mu y) - \frac{C_3'}{\mu} \sin(\mu y) \quad \dots (31)$$

y で微分すると、

$$Y'(y) = -C_3 \mu \sin(\mu y) - \frac{C_3''}{\mu} \sin(\mu y) \quad \dots (32)$$

再度微分すると、

$$Y''(y) = -C_3' \mu \sin(\mu y) - C_3 \mu^2 \cos(\mu y) - \frac{C_3'''}{\mu} \sin(\mu y) - C_3'' \mu \cos(\mu y) \quad \dots (33)$$

式(31)(32)(33)を、式(27)の微分方程式へ代入し $\sin(\mu y)$ と $\cos(\mu y)$ について整理した後、これらが一次独立であることを利用すると、次の2式が成

り立つ。

$$-C_3'' = 0 \quad \dots (34)$$

$$-2C_3' \mu - \frac{C_3'''}{\mu} + 2 \frac{V_1 - V_0}{V_0 H + (V_1 - V_0)y} C_3 \mu + \frac{2C_3''}{\mu} \frac{V_1 - V_0}{V_0 H + (V_1 - V_0)y} = 0 \quad \dots (35)$$

式(34)より式(35)式は、

$$-2C_3' \mu - \frac{C_3'''}{\mu} + 2C_3 \mu \frac{V_1 - V_0}{V_0 H + (V_1 - V_0)y} = 0 \quad \dots (36)$$

また式(34)より、 $C_3''' = 0$ 、 $C_3 = ay + b$ が成り立つ。よって式(36)は次のようになる。

$$a - \frac{V_1 - V_0}{V_0 H + (V_1 - V_0)y} (ay + b) = 0 \quad \dots (37)$$

式(31)に $C_3 = ay + b$ 、 $C_3' = a$ を代入すると $\mu \neq 0$ より次式が成り立つ。

$$Y(y) = A \left\{ V \cos(\mu y) - \frac{V_1 - V_0}{\mu H} \sin(\mu y) \right\}, \quad \left(A = \frac{aH}{V_1 - V_0} \right) \quad \dots (38)$$

これを境界条件式(9)の $y=H$ の式の下で解き μ を μ_n と書くと次のようになる。

$$\mu_n = \frac{n\pi}{H}, \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (39)$$

式(38)に式(39)を代入すると、

$$Y(y) = A \left\{ V \cos(\mu_n y) - \frac{V_1 - V_0}{\mu_n H} \sin(\mu_n y) \right\} \quad \dots (40)$$

5. 吹き上げ速度

第3, 4章で得られた解を式(3)に代入すると、 $z > 0$ において次式が得られる。

$$P(y, z; 0) = -\rho V_0 H \left[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \right] \times \left\{ (V_0 + Ky) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \times \exp \left\{ -\mu_n \left(1 + \frac{k}{\mu_n} \right) + k \right\} \quad \dots (41)$$

ここで、 $K = \frac{V_1 - V_0}{H}$

また、 ρ は流体密度、 $F(\mu_n)$ は固有値 μ_n に対応するスペクトル (係数) である。

z 方向成分の運動方程式は次のようになる。

$$U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots (42)$$

ここで、 $w(x,y,z)$ は擾乱速度の z 成分である。よって、式(2), (41), (42)より、揚力線位置における吹き上げ速度は次のように得られる。

$$w(0,y;0) = \frac{V_0 H}{2V} \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \left\{ -\mu_n \left(1 + \frac{K}{\mu_n} \right) + k \right\} \times \left\{ \left(V_0 + Ky \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \dots (43)$$

6. 揚力線方程式

せん断流の場合の二次元翼の揚力係数 C_l は、非粘性・非圧縮性流れの仮定の下では、翼形状、迎角、主流の垂直上下方向のシアパラメータの3変数 (物理量) の関数として表される。しかし、薄翼の仮定の下では揚力係数は一様せん断流の影響は受けない。よって次のように表される。

$$C_l = f(z_i, \alpha) \quad \dots (44)$$

ここで z_i は翼形形状、 α は迎角である。

式(44)で表される揚力係数を、揚力線理論に適用するに当たって、以下の仮定を考慮する。

- (a) 迎角の基準を零揚力角にとる …… z_i の消去
- (b) 幾何迎角を有効迎角で置きかえる …… 誘導迎角の導入
- (c) 誘導迎角の2次以上の項を無視する …… 微小じょう乱の仮定

したがって、式(44)は次のように表される。

$$C_l(\alpha_e) \cong C_l(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} C_l(\alpha) \alpha_e \quad \dots (45)$$

$$\alpha_e = \alpha + \alpha_i$$

ここで、 α_e , α , α_i はそれぞれ有効迎角、幾何学的迎角、誘導迎角である。

次に、揚力線に働く翼幅方向揚力分布 $l_f(y)$ (以下簡単のため局所揚力と呼ぶことにする) は ε を微小量として、次のように圧力差の積分で与えられる。

$$l_f(y) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{ p(x, y, -0) - p(x, y, +0) \} dx \quad \dots (46)$$

よって局所揚力は式(2), (41), (46)より次式が成立する。

$$l_f(y) = 2\rho V_0^2 H \left[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{V_0 \mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \right] \dots (47)$$

各翼断面位置 y において2次元の関係が成り立つ仮定から次式が成り立つ。

$$l_f(y) = \frac{1}{2} \rho c(y) V(y)^2 \times \left[C_l\{\alpha(y); H=\infty\} + \alpha_i(y) \frac{d}{d\alpha} C_l\{\alpha(y); H=\infty\} \right] \dots (48)$$

ここで揚力係数 C_l には二次元値であることを明示するために $H=\infty$ を入れる。

$\alpha_i = w(0, y; 0) / U$ の関係から式(43)を(48)に代入する。よって式(47), (48)を等置することにより $F(\mu_n)$ を未知数とする次のような揚力線方程式が得られる。

$$F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{V_0 \mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \times \left[1 - \frac{1}{8} c(y) \left\{ -\mu_n \left(1 + \frac{k}{\mu_n} \right) + k \right\} \frac{d}{d\alpha} C_l\{\alpha(y); H=\infty\} \right] = \frac{1}{4H} c(y) \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) C_l\{\alpha(y); H=\infty\} \quad \dots (49)$$

式(49)を解くためには、与えられた翼の選点位置における翼形に対する揚力係数と揚力傾斜の2次元特性値を予め算出しておく必要がある。前述のように垂直上下方向に直線の変化するせん断流中における二次元翼の揚力係数は、翼が薄翼の場合はシアパラメータの影響を受けないことが知られている。よって、各断面における2次元値は通常の2次元翼理論の揚力係数と揚力傾斜を用いればよいことになる。

7. 流体力特性

局所揚力係数を次のように定義する。

$$C_l(y) = \frac{2l_f(y)}{\rho c(y) V(y)^2} \quad \dots (50)$$

これに、局所揚力式(47)を代入して計算すると、

$$C_l(y) = \frac{4H}{c(y) \{ V(y) \}^2} \left[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{V_0 \mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \right] \dots (51)$$

全揚力は局所揚力を翼幅領域に積分することで得ら

れるため

$$L = \int_0^H l_f(y) dy \quad \dots (52)$$

全揚力係数を次のように定義する。

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho \int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \quad \dots (53)$$

これに全揚力を代入して計算すると、

$$C_L = \frac{4HV_0^2}{\int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \times \left\{ HF(0) - 4 \frac{K}{V_0} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} F(\mu_n) \right\} \quad \dots (54)$$

となる。

誘導抗力は次式の積分で与えられる。

$$D_i = - \int_0^H l_f(y) \frac{1}{V(y)} w(0, y, 0) dy \quad \dots (55)$$

また、誘導抗力係数は次のように定義し

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho \int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \quad \dots (56)$$

誘導抗力を代入すると、

$$C_{Di} = - \frac{2V_0^2 H^2}{\int_0^H c(y) V(y)^2 dy} \int_0^H \left\{ \frac{V_0}{V(y)} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ -\mu_n \left(1 + \frac{k}{\mu_n} \right) + k \right\} \times \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n V_0} \sin(\mu_n y) \right\} \times \left[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n V_0} \sin(\mu_n y) \right\} \right] dy \quad \dots (57)$$

式(41), (43), (49), (57) で $-\mu_n \left(1 + \frac{k}{\mu_n} \right) + k$ は $-\mu_n$ となることから、垂直方向シアパラメータ k は流体特性に影響を与えないことがわかる。

8. 計算例

本研究では平面形状は矩形（一部テーバ翼）、断面形状は平板、迎角は 5° の翼について具体的な数値計算を行った。そして数値計算の結果より、局所揚力係数 $C_l(y)$ 、全揚力係数 C_L および誘導抗力係

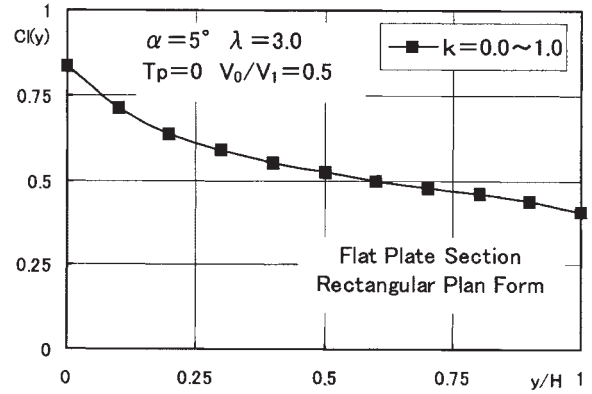


図2. 局所揚力係数 (k の影響)

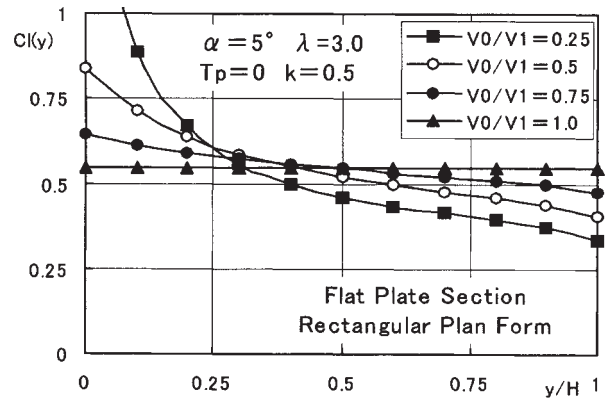


図3. 局所揚力係数 (V_0/V_1 の影響)

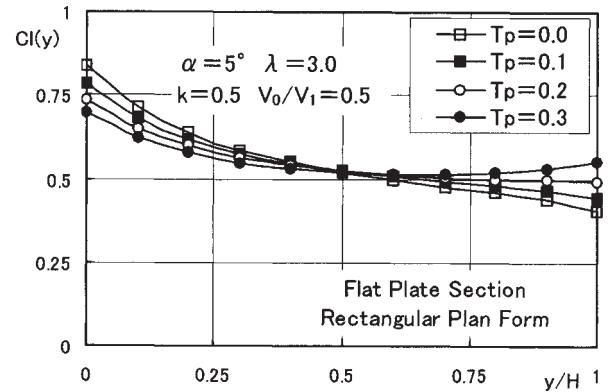


図4. 局所揚力係数 (T_p の影響)

数 C_{Di} の流体力特性に及ぼす垂直方向シアパラメータ k 、翼幅方向シアパラメータ V_0/V_1 、テーバ比 T_p ($\{c(0) - c(H)\}/H$)、アスペクト比 λ の影響を明らかにした。

図2は翼幅方向シアパラメータ V_0/V_1 を一定にとり、垂直方向シアパラメータ k がアスペクト比 $\lambda = 3.0$ の矩形翼の局所揚力係数に及ぼす影響を計算したものである。変化局所揚力係数は低流速側が大きくなっており、高流速側は小さくなっている。このグラフより、垂直方向シアパラメータが変化しても

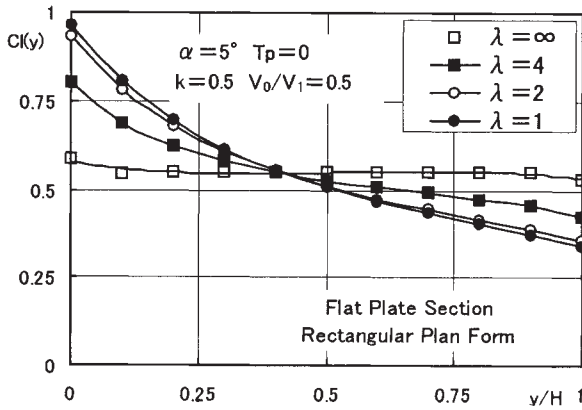


図5. 局所揚力係数（アスペクトλの影響）

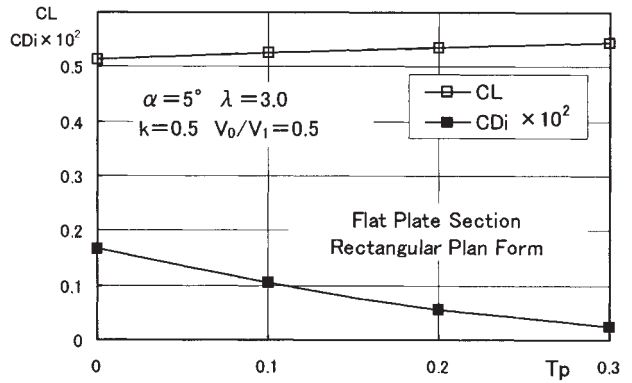


図8. 全揚力係数と誘導抗力係数（ T_p の影響）

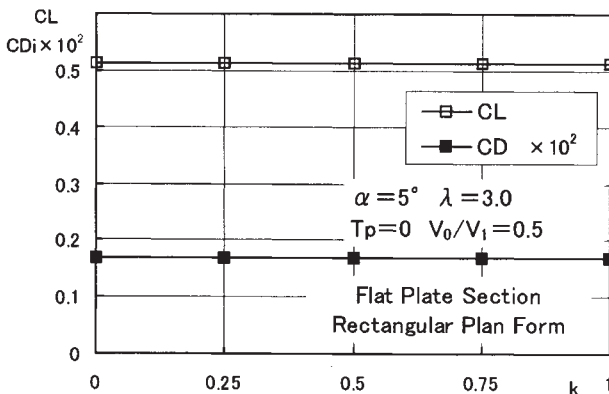


図6. 全揚力係数と誘導抗力係数（ k の影響）

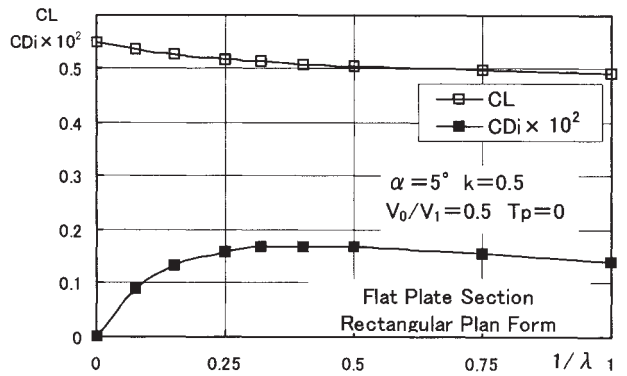


図9. 全揚力係数と誘導抗力係数（アスペクトλの影響）

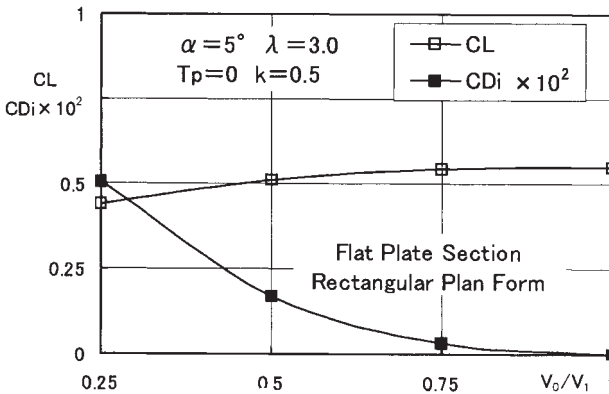


図7. 全揚力係数と誘導抗力係数（ V_0/V_1 の影響）

局所揚力係数分布には影響がないことが示されている。

図3は垂直方向シアパラメータ k を一定にとり翼幅方向シアパラメータ V_0/V_1 がアスペクト比 $\lambda = 3.0$ の矩形翼の局所揚力係数に及ぼす影響を計算したものである。翼幅方向シアパラメータが大きくなり一様流に近づくほど一般的な局所揚力係数分布になっていくことがわかる。

図4は局所揚力係数に及ぼすテーパ比の影響を計

算したものである。翼弦の長い低流速側の局所揚力が大きくなっている。翼弦が短い高流速側は、テーパ比が小さくなるにつれて局所揚力係数が増えていることがよくわかる。

図5はアスペクト比が大きくなるほど、局所揚力係数が一定値に近づく様子を示している。

図6は全揚力係数と誘導抗力係数の垂直方向シアパラメータの影響について計算したものである。全揚力係数と誘導抗力係数ともに垂直方向シアパラメータが変化しても値が変化しないことから影響を受けていないことがわかる。

図7は全揚力係数と誘導抗力係数の翼幅方向シアパラメータの影響について計算したものである。計算結果より翼幅方向シアパラメータが減少すると共に全揚力係数は減少している。また誘導抗力係数は、翼幅方向シアパラメータが1（一様流）に近づくほど小さくなり、零に近づいている。これは、二次元流れに近づくからである。

図8は全揚力係数と誘導抗力係数の翼テーパ比の影響について計算したものである。全揚力係数の変化は比較的小さいが、抗力係数はテーパ比が増すと小さな値となっている。

図9は全揚力係数と誘導抗力係数に及ぼすアスペ

クト比の影響について計算したものである。このグラフではアスペクト比の逆数をとっているが、これは比較の利便性を考慮したためである。全揚力係数はアスペクト比の変化に対してあまり大きな変化はない。抗力係数についてはアスペクト比が大きくなるにつれて小さくなり、零に近づいていることがわかる。

全体を通して、主流の低速側の局所揚力係数分布の値が大きいのは、主流の縦渦が変形して後流で随伴渦となり、それによる揚力線位置における誘導速度が原因と考えられる。

垂直上下方向シアパラメータは揚力線方程式には現れるものの、計算結果として流体力特性に影響を与えないのは、各断面において二次元流れが成立するという揚力線理論の仮定に基づくものと考えられる。

9. 結 言

平行2平面間を流れる二次元せん断流（主流の速度分布が、翼幅方向と翼面に垂直上下方向の両方向に直線的に変化するせん断流）中の三次元翼に対して、揚力線理論を展開した。また、これに基づいて三次元翼特性に及ぼす主流の2種のシアパラメータ、アスペクト比及び翼テーパー比の影響を明らかにした。本研究の内容は以下のように要約される。

- (1) じょう乱圧力に関する運動方程式に対して、三次元翼を揚力線で近似した基本解と主流の速度分布の両者に変数分離を導入することにより、2種の常微分方程式の境界値問題が誘導された。
- (2) 2種の常微分方程式の境界値問題は、 $Y(y)$ について既存の解の検討を行い妥当性を確認し、 $Z(z)$ に関する常微分方程式については閉じた解が求められた。
- (3) 二次元流れの問題における物理量の考察から、揚力線理論へ応用するための揚力係数表示が示され、さらに吹き上げ速度を考慮することにより揚力線方程式が得られた。
- (4) 揚力線方程式は翼幅方向の選点によって連立方程式に帰着されて数値的に解かれ、局所揚力係数、全揚力係数及び誘導抗力係数に及ぼす2種

のシアパラメータ、アスペクト比及び翼テーパー比の影響が明らかにされた。

- (5) 局所揚力係数、全揚力係数及び誘導抗力係数は、いずれも垂直上下方向のシアパラメータの影響を受けず、翼幅方向の速度勾配（シアパラメータ）、アスペクト比及び翼テーパー比の影響を受け、特に誘導抗力係数がそれらの影響を大きく受けた。

参考文献

- (1) 伊藤惇・佐藤則喜・高橋勝, 「せん断流中における三次元薄翼の一特異点解法」, 日本機械学会論文集, 56-522, B(1990), pp.295-300.
- (2) 伊藤惇, 「せん断流中における超空洞翼の準三次元理論」, 日本機械学会論文集, 56-530, B(1990), pp.2871-2878.
- (3) 伊藤惇, 「特異点法による部分空洞翼の流れ場の基礎式とその解法(第7報, 三次元せん断流)」, 日本機械学会論文集, 57-536, B(1991), pp.1289-1296.
- (4) 伊藤惇・成田章, 「せん断流中の超空洞翼のための揚力線理論」, 日本機械学会論文集, 57-537, B(1991), pp.1635-1639.
- (5) 伊藤惇, 「せん断流中の超空洞翼のための揚力線理論(続報, 部分空洞への応用)」, 日本機械学会論文集, 57-543, B(1991), pp.3783-3787.
- (6) 伊藤惇・中村豪, 「指数せん断流中における翼の揚力線理論と超空洞翼への応用」, 日本機械学会論文集, 67-663, B(2001), pp.2725-2730.
- (7) 伊藤惇・中村豪, 「一様せん断流中における翼の揚力線理論と臨界シアパラメータ」, 日本機械学会論文集, 69-679, B(2003), pp.547-552.
- (8) Honda, M, "Theory of a Thin Wing in a Shear Flow", Proc. Roy. Soc. A, 254, 1960, p. 372.
- (9) Von Karman, Th. and Tsien, H. S., "Lifting-Line Theory for a Wing in Non-Uniform Flow", Quarterly of Applied Mathematics, 3-1(1945), pp.1-11.