境界値問題への積分変換と複素積分の応用 I

—応用数学における教材研究—

森　本　真　理・成　田　　　章

Applications of Integral Transformation and Complex Contour Integral to Boundary Value Problem I
—Study of Teaching Material in Applied Mathematics—

Mari Morimoto and Akira Narita

（2006年12月11日受理）

The boundary value problem for the one-dimensional equation of heat conduction is studied as a teaching material in the applied mathematical education in terms of the integral transformations and the complex contour integral. The Laplace transformation with respect to time onto s-space is performed at first, and the obtained ordinary differential equation concerning real space coordinate is solved in the various methods. The inverse transformation of the solution is carried out using the Bromwich complex integral which is a formula for the inverse. Since the solution is generally a function of $\sqrt{s}$ with the two-valued property making calculation of the integral difficult, a detailed and easily understandable description for the integration is given. The method due to the Fourier transformation is also given for finding the solution followed by the easy inverse operation. It should be strongly recognized from the discussions in text that the mathematics such as the ordinary differential equation, the Laplace and Fourier transformations and the complex analysis are mutually and inseparably joined and complemented, and their education in an engineering is very important.

KEYWORDS : boundary value problem, heat conduction, Laplace and Fourier transformations, Bromwich integral

1. はじめに

理工系における応用数学は，大まかにはベクトル解析系，境界値問題系および確率・統計系の３つに分けられる．ここで，境界値問題系は，多くの数学から構成され，我々が講義で取り上げているものは常微分方程式，フーリエ解析，ラプラス変換，複素関数論および境界値問題である．その他に，直交関数系，特殊関数，関数空間（線形代数），変分法などがある．この論文の目的は，物理学や工学で現れる問題の処理において，この系を構成する個々の数学が重要な役割を果たしていることを具体例を挙げて述べ（講義で取り上げているものだけに言及），それらの関連性と威力を示すことである．換言すると，境界値問題系における個々の数学の応用の一端と親密な繋がりに関する認識を与え，それらの数学に対する教育の重要性を再認識することである．従って，この論文は応用数学教育における教材研究に関するものであって，学術的に新しいものは特には含まれない．

教育および社会をとりまく諸般の状況から推察すると，理工系学生の数学に関する学力は低下傾向にある．上で述べた目的を取りあげた背景にはこのようなことがある．つまり，それを少しでも上向かせるように，数学は必要であるとの認識を与える一端を担いたいのである．境界値問題系を取り上げたのは，工学全般においては，この系の利用頻度が高く応用数学の重要性を理解して戴くには最適と考えた

からである．

以下の節では，特に熱伝導方程式に的を絞って，この方程式の境界値問題にフーリエ変換やラプラス変換などの積分変換を利用してその解法を論ずる．2節では熱伝導方程式とラプラス変換について私見等を述べる．3節と4節では，空間的に1次元に簡単化した有限長の棒と半無限長の棒の2つの例についていろいろな解法を試みる．これより常微分方程式，積分変換および複素積分が不可分的に結合していることが深く認識できるはずである．この2つの例は，応用解析の授業において実際に変数分離法を利用して解法を与えているものであり，[1,2] 積分変換による別の解法を示すことは極めて教育的である．さらに，逆変換における複素積分の計算を具体的に実行することによりその威力を認識し計算方法を体得することも重要である，ということもわかって戴けると思う．また，これらの解法は極力わかり易いかたちで与えるので，研究に必要な人たちにも有用であると考えている．

2.　熱伝導方程式とラプラス変換

境界値問題は，偏微分方程式を与えられた境界条件（初期条件まで含む）のもとで解くという問題である．詳細については文献 [3]-[6] を参照されたい．良く知られているように，自然現象を記述する偏微分方程式は大まかには熱伝導方程式（または拡散方程式），波動方程式，ポアッソン方程式，ナビーエ・ストークス方程式，シュレデインガー方程式の5つ位の型に分類される．[7] ここでは，簡単のため最初の2つにのみ言及する．つまり，

1）熱伝導方程式：$\rho c \dfrac{\partial U(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t} = \kappa \Delta U(\boldsymbol{r},\ t)$　(2.1)

2）波動方程式：$\dfrac{\partial U(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t^2} = v^2 \Delta U(\boldsymbol{r},\ t)$　(2.2)

である．ここで，t は時間，$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$ は媒質内の位置を表す．Δ はラプラスの演算子を表し式 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ で定義される．式(2.1)で $U(\boldsymbol{r},\ t)$ は温度である．ρ，c，κ はそれぞれ密度，比熱，熱伝導率であり一定としている．式(2.2)では，$U(\boldsymbol{r},\ t)$ は波の変位，v は伝搬速度である．

熱伝導方程式は t に関して1階微分となっているので，置き換え $t \to -t$ により左辺に負号が現れて方程式の形が変わる．これは，過去における熱伝導現象を考えても無意味で未来を対象とすることだけが意味がある，と解釈するべきである．この性質は，時間反転の対称性がないと表現されていて，熱の不可逆性（熱力学第2法則）に起源を有していると考えられる．これに対して波動方程式は時間反転の対称性を有し，未来と過去は同じ方程式で記述される．一方，座標に関してはどちらの方程式も反転対称性を有することは，t に関するのと類似の議論から容易にわかる．

熱伝導方程式の解法で積分変換を応用するとき，t に関しては決まってラプラス変換が利用されフーリエ変換が使われることはない．この理由は，熱伝導方程式が時間反転の対称性を持たないことによる．座標に関しては問題に応じて都合の良い方が利用できる．

常微分方程式と熱伝導方程式の解法にラプラス変換（t に関して）を応用したときの逆変換の方法について述べておく．教科書レベルの簡単な常微分方程式では，逆変換は簡単な表にまとめられた公式を利用する程度で容易に求めることができる．[1,2] しかし，熱伝導方程式では，簡単な表の利用で求められるほど容易ではなく，もっと大きな表が必要となる．[8] しかも，関数形の複雑さのため欲しい関数がそのまま載っていることは期待できず，表を使いこなすにも訓練が必要である．それでも表を利用する方法が通常行われているようであり，著者の一人もそういう教育を受けた．

一方，ラプラス逆変換には，複素積分で与えられるブロムウイッチ積分という一般的な公式が存在し，それを計算することで逆変換を求めることができる．[1,8] 著者らはこちらの方が熱伝導方程式に対しては，汎用性があって良いと考えている．しかし，この積分では2価関数を含む複素関数の経路積分を計算しなければならない，という厄介なことに遭遇する．つまり，複素関数論についてかなりの知識が要求されそうな気がする．しかし，実は，こつをのみこむとその経路積分の計算はそんなに難しいものではなく，この論文ではそのこつも与える．これにより複素積分による方法の威力を十分に感じ取って戴けると思っている．

通常，表を利用して得られた解は誤差関数を用いて表現される．[4,8] これに対してブロムウイッチ積分から得られるものは座標に関するフーリエ級数またはフーリエ積分で表現される．どちらが良いかは用途に依るが，これらが数学的に等価であることは複素積分におけるコーシーの積分定理 [1,2] を利用することにより証明できる．この証明は紙数の都合により次回に譲る．

3.　有限長の棒における熱伝導

有限長の棒における熱伝導問題の一例として次の境界値問題を考える．つまり，空間に関して1次元の熱伝導方程式

$$\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

を境界条件

$$U(0,\ t)=0 \tag{3.2a}$$
$$U(1,\ t)=0 \tag{3.2b}$$
$$U(x,\ 0)=x \tag{3.2c}$$

のもとで解くことを考える．[1,2] これは付録に述べたように，熱伝導方程式をもう少し緩和した境界条件「$U(0,\ t)=0,\ U(l,\ t)=0,\ U(x,\ 0)=ax$」のもとで解くことと等価である．以下の解法は多少の改良により質的に異なる他の境界条件に対しても応用できる．ここで解く問題は，長さ1の棒内の時刻0での温度分布が式(3.2c)の直線的増加を示していて，$t>0$ において棒の両端の温度を0に保持するとき，任意の時刻 $t\,(>0)$ における棒内の温度分布を求める問題である．以下で，この境界値問題を t に関してラプラス変換することにより解く．

3.1　t に関するラプラス変換

$U(x,\ t)$ の t に関するラプラス変換 $\bar{U}(x,\ s)$ は

$$\bar{U}(x,\ s)=\mathcal{L}_t U(x,\ t)=\int_0^\infty e^{-st}U(x,\ t)dt \tag{3.3}$$

で定義される．[1,2] 式(3.1)の両辺を t に関してラプラス変換して整理すると x に関する常微分方程式

$$\frac{d^2\bar{U}(x,\ s)}{dx^2}-s\bar{U}(x,\ s)=-x \tag{3.4}$$

を得る．この式を得るために，左辺のラプラス変換では境界条件（3.2c）を用い，右辺では x に関する微分と t に関する積分の順序を交換した．また，境界条件もラプラス変換しておかなければならない．式(3.2)にこの変換を行うと

$$\bar{U}(0,\ s)=0 \tag{3.5a}$$
$$\bar{U}(1,\ s)=0 \tag{3.5b}$$

となる．式(3.4)は x に関する非同次の2階定数係数線形常微分方程式でこれを境界条件（3.5）のもとで解けばよい．これから先の主な解法には3通り考えられるのでこれを以下に順に述べる．

3.2　通常の方法とラプラス逆変換

ここで述べる通常の方法とは，常微分方程式(3.4)を解くための最も馴染みのあるもののことで，多くの教科書に記述されている方法のことである．[1,2] 方程式(3.4)の同次微分方程式の解 u は，その特性方程式の解が $\pm\sqrt{s}$ となるので $u=C_1e^{\sqrt{s}x}+C_2e^{-\sqrt{s}x}$ となる．ここで，C_1，C_2 は任意定数である．また，特殊解は $Ax+B$ と仮定して（3.4）に代入することにより求めることができ，xs^{-1} となる．従って，方程式(3.4)の一般解は

$$\bar{U}(x,\ s)=C_1e^{\sqrt{s}x}+C_2e^{-\sqrt{s}x}+\frac{x}{s} \tag{3.6}$$

である．C_1，C_2 は式(3.5)を用いると $C_1=-C_2=-(2s\ \sinh\sqrt{s})^{-1}$ のように決めることができる．以上より，全ての境界条件を満足する $\bar{U}(x,\ s)$ は次のようになる．

$$\bar{U}(x,\ s)=\frac{x}{s}-\frac{\sinh\sqrt{s}\,x}{s\ \sinh\sqrt{s}} \tag{3.7}$$

次にこれをラプラス逆変換しなければならない．第1項の逆変換は x であることは容易にわかるが，第2項は見るからに難しそうである．この逆変換は表を用いてもできるがここではブロムウイッチ積分を利用して求めることにする．[1,2] 逆変換表を用いた計算は次回で行う．式(3.7)の逆変換は第2項にブロムウイッチ積分を利用すると

$$U(x,\ t)=\mathcal{L}_t^{-1}\bar{U}(x,\ s)=x-u(x,\ t) \tag{3.8a}$$

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}\frac{\sinh\sqrt{s}\,x}{s\ \sinh\sqrt{s}}\ ds \tag{3.8b}$$

のように書くことができる．ここで，σ は s に関する複素関数 $F(s)=\sinh\sqrt{s}\,x/(s\ \sinh\sqrt{s})$ の特異点が範囲 $\mathrm{Re}(s)<\sigma$ に存在するように選ばれる任意の実数で，今の場合，後でわかるように $\sigma>0$ に選ぶことができる．複素積分（3.8b）は，$F(s)$ が1価関数で $s=0$ を中心とする半径 R の円周上で有界で不等式 $|F(s)|\leqq M/R^n\ (n>1,\ \ M>0)$ を満足すれば，Fig.1に示した閉じた積分路に沿って積分したものに等しい．[1] 理由は，$F(s)$ がその不等式を満足することを実際に容易に示すことができるので，円周部分における積分が $R\to\infty$ のときに0に収束するからである．

しかし，今の場合 $F(s)$ は $\sqrt{s}$ を含み，$\sqrt{s}$ が $s=0$ を分岐点とする2価関数であるため，Fig.1の積分路を用いることが出来ないように思われる．それは，Fig.1の路は分岐点 $s=0$ のまわりを1周するので，$\sqrt{s}$ は $\sqrt{e^{2\pi i}s}=e^{\pi i}\sqrt{s}=-\sqrt{s}$ となり，1周して積分路の出発点に戻ってきたときに，符号が変わってしま

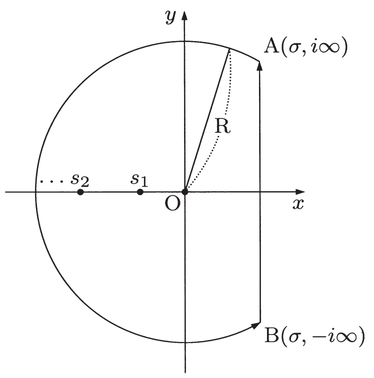

Fig. 1

い不連続が生ずるからである．つまり，積分路上での正則性が破れていて留数定理が適用できないのである．通常，このような状況下にある多価関数の複素積分は Riemann 面上で実行されなければならない．[9] つまり，複素平面上の分岐点を始点とする適当な直線に沿って切目（cut）を入れてその面を作り，$F(s)$ がその上で 1 価関数になるようにして積分しなければならない．このため今の積分 (3.8b) は厄介そうに見える．だが，幸運にも $F(s)$ は分母と分子に$\sqrt{s}$を含み，$F(e^{2\pi i}s)=\sinh(-\sqrt{s}\,x)/(s\sinh(-\sqrt{s}))=F(s)$ が成り立つので 1 価関数である．従って，Fig.1 の路に沿って積分すれば良い．その結果，留数定理が応用できる．

関数 $F(s)$ の極はこの関数の分母を 0 とおいて求めることができる．つまり，$s\sinh\sqrt{s}=0$ より$s=0$, $\sinh\sqrt{s}=0$ である．後者の解は $s_n=-n^2\pi^2(n=0, 1, 2, \cdots)$ であるが s_0は除かなければならない．何故なら，分子にも$\sqrt{s}$を含むものがあって s_0は $\sinh(\sqrt{s}\,x)/\sinh\sqrt{s}$ の極にはなっていないからである．結局，$F(s)$ の極は $s=0$ と $s_n(n\geqq 1)$で全て 1 位の極である．積分（3.8b）に対して極 $s=0$ からの寄与はその留数 $\mathrm{Res}[e^{st}F(s), 0]$ に等しく，それを計算すると x となりこれは式(3.8a)の第 1 項を打ち消す．極 $s_n(n\geqq 1)$ からの寄与は留数

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_n] &= \lim_{s\to s_n}(s-s_n)e^{st}F(s)\\
&= \frac{e^{s_n t}\sinh(\sqrt{s_n}x)}{s_n}\lim_{s\to s_n}\frac{s-s_n}{\sinh(\sqrt{s})}\\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t}}{n}\sin n\pi x \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

で与えられる．ここで極限の計算にはロピタルの定理を利用した．式(3.8)よりこれを n に関して和をとって符号を変えたものが解である．すなわち，解 $U(x, t)$ は

$$U(x, t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \qquad (3.10)$$

である．

3.3　フーリエ級数を用いる方法

常微分方程式(3.4)をフーリエ級数を利用して解くことを考える．$\bar{U}(x, s)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で定義されているので，これをフーリエ級数に展開するには有限区間で定義された関数のフーリエ級数を扱うことになる．[1,2] これにはフーリエ余弦級数と正弦級数がよく用いられるが，今の場合，境界条件（3.5）を考慮すると正弦級数を用いなければならない．これより

$$\bar{U}(x, s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(s)\sin\, n\pi x \qquad (3.11)$$

とおく．これが境界条件（3.5）を満たすことは明らかである．(3.11）を（3.4）に代入すると，

$$(\text{左辺})=-\sum_{n=1}^{\infty}(n^2\pi^2+s)b_n(s)\sin n\pi x \qquad (3.12)$$

となる．また，(右辺)$=-x(0\leqq x\leqq 1)$ の正弦級数が，

$$(\text{右辺})=-x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin n\pi x \qquad (3.13)$$

となることは，簡単な計算から容易にわかる．(3.12）と（3.13）を比べると，

$$b_n(s)=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{n^2\pi^2+s} \qquad (3.14)$$

が得られる．これを(3.11)に代入してこのラプラス逆変換が

$$\mathcal{L}_t^{-1}b_n(s)=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-\pi^2 n^2 t} \qquad (3.15)$$

であることを用いると，$\bar{U}(x, s)$ の逆変換が（3.10）に一致することが容易にわかる．

3.4　x に関してもラプラス変換を用いる方法

ここでは常微分方程式(3.4)を x に関するラプラス変換を用いて解いても同様の結果が得られることを見る．有限長の棒であることから $\bar{U}(x, s)$ の定義域は $0\leqq x\leqq 1$ であるが，ラプラス変換を応用するためにはその定義域は $0\leqq x$ でなければならない．そこで，境界条件（3.5b）との連続性から，$1\leqq x$ では $\bar{U}(x, s)=0$ と定義するものとする．$1\leqq x$ における $\bar{U}(x, s)$ をこのように定義するのも一つの方法であるが，$0\leqq x\leqq 1$ における $\bar{U}(x, s)$ が周期

的に繰り返したものである，というように定義する方法もある．どちらを採用しても得られる結果は同じであるが，ここでは前者を採用する．

これに合わせて，微分方程式(3.4)を次のように修正しなければならない．

$$\frac{d^2\bar{U}(x,\ s)}{dx^2}-s\bar{U}(x,\ s)=-\theta\,(1-x)x \qquad (3.16)$$

ここで，$0\leqq x$ であり，$\theta(x)$ はステップ関数で式 $\theta(x)=0(x<0)$，$1(x\geqq 1)$ により定義される．上で拡張した $\bar{U}(x,\ s)$ が (3.16) の解となっていることは容易にわかる．$\bar{U}(x,\ s)$ のラプラス変換 $\bar{\bar{U}}(p,\ s)$ は

$$\bar{\bar{U}}(p,\ s)=\mathcal{L}_x\bar{U}(x,\ s)$$

$$=\int_0^\infty e^{-px}\bar{U}(x,\ s)dx=\int_0^1 e^{-px}\bar{U}(x,\ s)dx \qquad (3.17)$$

で与えられる．ここで，$1\leqq x$ では $\bar{U}(x,\ s)=0$ であることを用いた．(3.16) を x に関してラプラス変換すると，

$$(\text{左辺})=\mathcal{L}_x\left(\frac{d^2\bar{U}(x,\ s)}{dx^2}-s\bar{U}(x,\ s)\right)$$

$$=(p^2-s)\bar{\bar{U}}(p,\ s)+\bar{U}_x(1-0,\ s)e^{-p}-\bar{U}_x(0,\ s)$$

$$(\text{右辺})=-\mathcal{L}_x\theta\,(1-x)x=-\int_0^1 xe^{-px}\,dx$$

$$=-\frac{1}{p^2}+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)e^{-p}$$

となる．$v_0=\bar{U}_x(0,\ s)$，$v_1=\bar{U}_x(1-0,\ s)$とおくと

$$\bar{\bar{U}}(p,\ s)=-\frac{1}{p^2(p^2-s)}+\frac{v_0}{p^2-s}$$

$$+\frac{1}{p^2-s}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-v_1\right)e^{-p} \qquad (3.18)$$

が得られる．部分分数分解をし，$\mathcal{L}_x^{-1}1/p^{n+1}=x^n/n!$，$\mathcal{L}_x^{-1}a/(p^2-a^2)=\sinh ax$，$\mathcal{L}_x^{-1}p/(p^2-a^2)=\cosh ax$，$\mathcal{L}_x^{-1}e^{-p}F(p)=\theta(x-1)f(x-1)$（ただし，$\mathcal{L}_xf(x)=F(p)$)を用いると，(3.18) のラプラス逆変換を求めることができる．その結果，次式を得る．

$$\bar{U}(x,\ s)=\frac{x}{s}-\frac{1}{s\sqrt{s}}(1-sv_0)\sinh\sqrt{s}\,x$$

$$+\theta(x-1)\Big[-\frac{x}{s}+\frac{1}{s}\cosh\sqrt{s}\,(x-1)$$

$$+\frac{1-sv_1}{s\sqrt{s}}\sinh\sqrt{s}\,(x-1)\Big] \qquad (3.19)$$

これに (3.5b) の境界条件を適用すると v_0 は $1-sv_0=\sqrt{s}/\sinh\sqrt{s}$ のように決めることができる．これを (3.19) に代入して $0\leqq x\leqq 1$ とすると3.2の (3.7) と同じ式となり，後は同様にして $U(x,\ t)$を求めることができる．

また，(3.7) を用いて $v_1=\bar{U}_x(1-0,\ s)$ より v_1を決めると $1-sv_1=\sqrt{s}\coth\sqrt{s}$ となる．詳細は省略するが，これを (3.19) に代入して $x>1$ のときの $\bar{U}(x,\ s)$ を求めると，簡単な計算から $\bar{U}(x,\ s)\equiv 0$ となり，その範囲での定義と矛盾しないことがわかる．

4. 半無限長の棒における熱伝導

半無限長の棒における熱伝導問題の一例として，熱伝導方程式(3.1)を境界条件

$$U(0,\ t)=0 \qquad (4.1a)$$

$$|U(x,\ t)|\leqq M \qquad (4.1b)$$

$$U(x,\ 0)=f(x) \qquad (4.1c)$$

のもとで解くことを考える．ただし，Mは正の定数であり，$f(x)=1(0\leqq x\leqq 1)$，$0(x>1)$ である．

4.1 t に関するラプラス変換

境界条件 (4.1c) より，3.1節と同様にして，

$$\frac{d^2}{dx^2}\bar{U}(x,\ s)-s\bar{U}(x,\ s)=-f(x) \qquad (4.2)$$

を得る．また，境界条件 (4.1a, 4.1b) のラプラス変換はそれぞれ，

$$\bar{U}(0,\ s)=0 \qquad (4.3a)$$

$$|\bar{U}(x,\ s)|\leqq N \qquad (4.3b)$$

となる．ただし，N は $N=M/\mathrm{Re}(s)$ となる正の定数で，(4.3b) は $\bar{U}(x,\ s)$ が有界であることを示す．

4.2 通常の方法とラプラス逆変換

ここでは3.2での手法を同様に用いる．(4.2) の同次微分方程式の解 u は $u=C_1e^{\sqrt{s}x}+C_2e^{-\sqrt{s}x}$ となり，また，特殊解は A と仮定して (4.2) に代入することにより $A=(1/s)f(x)$ と求めることができる．従って，常微分方程式(4.2)の解は

$$\bar{U}(x,\ s)=C_1e^{\sqrt{s}x}+C_2e^{-\sqrt{s}x}+\frac{1}{s}f(x) \qquad (4.4)$$

である．

境界条件 (4.3) と $x=1$ における $\bar{U}(x,\ s)$ と $\bar{U}_x(x,\ \mathrm{s})$ の連続性より，$0\leqq x\leqq 1$ における C_1，C_2 は，$C_1=-(2s)^{-1}e^{-\sqrt{s}}$，$C_2=-s^{-1}+(2s)^{-1}e^{-\sqrt{s}}$と求まり，また，$x>1$ における C_1，C_2は，$C_1=0$，$C_2=(e^{\sqrt{s}}+e^{-\sqrt{s}}-2)(2s)^{-1}$と求められる．ここで，$\bar{U}(x,\ s)$

と $\bar{U}_x(x,\ s)$ の $x=1$ における連続性は，物理的には，温度と熱流がともにこの点において連続であることによる．境界条件から得られる任意定数の値が $0 \leqq x \leqq 1$ と $x>1$ の場合で異なることから，これらを3.4で導入したステップ関数 $\theta(x)$ を用いて $\bar{U}(x,\ s)=\theta(1-x)\bar{U}_<(x,\ s)+\theta(x-1)\bar{U}_>(x,\ s)$ のように表すことができる．ここで，$\bar{U}_<(x,\ s)$ と $\bar{U}_>(x,\ s)$ はそれぞれ $0 \leqq x \leqq 1$ のときと $x>1$ のときの $\bar{U}(x,\ s)$ である．$\bar{U}(x,\ s)$ を一式で表示すると次のようになる．

$$\bar{U}(x,\ s)=\frac{e^{-\sqrt{s}(1+x)}-2e^{-\sqrt{s}x}}{2s} + \frac{2-e^{-\sqrt{s}(1-x)}}{2s}\theta(1-x)+\frac{e^{\sqrt{s}(1-x)}}{2s}\theta(x-1) \tag{4.5}$$

(4.5)を導くのに $\theta(x-1)+\theta(1-x)=1$ を用いた．

このラプラス逆変換は，次のようにまとめることができる．

$$\begin{aligned} U(x,\ t)&=L_t^{-1}\bar{U}(x,\ s)\\ &=\theta(1-x)+Q(1+x,\ t)-2Q(x,\ t)\\ &\quad-\theta(1-x)Q(1-x,\ t)+\theta(x-1)Q(x-1,\ t) \end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで，$Q(\beta,\ t)$ は

$$\begin{aligned} Q(\beta,\ t)&=L_t^{-1}\frac{1}{2s}e^{-\beta\sqrt{s}}\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} e^{st}\frac{1}{2s}e^{-\beta\sqrt{s}}ds\ (\beta>0) \end{aligned} \tag{4.7}$$

で与えられる。β は（4.6）と比較することにより $\beta=x,\ 1-x,\ x\pm1$ であり $\beta>0$ である．（4.6）は関数 $G(s)=e^{-\beta\sqrt{s}}/(2s)$ のブロムウイッチ積分により与えられている．$G(s)$ は2価関数$\sqrt{s}$を含むことから，$s=0$ を分岐点に持ち，また，$s=0$ を極に持つ．このことから，3.2では $F(s)$ が分母分子に$\sqrt{s}$を持つことから回避できたことが，ここでは回避できない問題として直面することになる．そこで，Fig.2 のように，複素平面上において $s=0$ から実軸の負側に切目（cut）を入れることによりつくった積分路を考える．$B\to C$ と $F\to A$ は半径 R の円弧の一部，$D\to E$ は原点を中心とする半径 r の小さい円弧である．$E\to F$ と $C\to D$ はそれぞれ切断の上と下で，そこでは偏角はそれぞれ π と $-\pi$ である．$G(s)$ はこの閉じた積分路内に特異点を持たないことから，コーシーの定理を利用すると，$B\to A$ における積分は，$B\to C\to D\to E\to F\to A$ の新しい積分路における積分へ変換される．ただし，$B\to C$ と $F\to A$ では $R\to\infty$，$D\to E$ では $r\to 0$ とする．このとき経路 $B\to C$，$F\to A$ からの $Q(\beta,\ t)$ への寄与は 0 であることを示すことができるが，証明は読者自ら試みられたい．経路 $D\to E$ からの寄与は $s=re^{i\theta}$ $(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと次のように求めることができる．

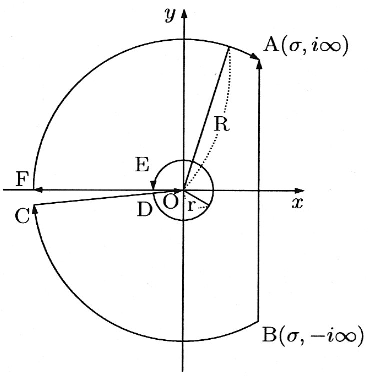

Fig. 2

$$\begin{aligned} \int_{D\to E} e^{st}G(s)ds &= \lim_{r\to 0}\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{tre^{i\theta}}}{e^{\beta\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}}d\theta\\ &=\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1\,d\theta=\pi i \end{aligned} \tag{4.8}$$

$E\to F$ と $C\to D$ に対しては，それぞれ $s=pe^{\pi i}(p:0\to\infty)$，$s=pe^{-\pi i}(p:\infty\to 0)$ のように p へ変換してそれらの積分を足すと次のようになる．

$$\begin{aligned} &\int_{E\to F} e^{st}G(s)ds+\int_{C\to D} e^{st}G(s)ds\\ &=\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{2pe^{i\beta\sqrt{p}}}dp-\int_0^\infty\frac{e^{-pt}}{2pe^{-i\beta\sqrt{p}}}dp\\ &=\int_0^\infty\frac{-ie^{-pt}}{p}\sin\ \beta\sqrt{p}\ dp\\ &=-2i\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda^2 t}}{\lambda}\sin\ \beta\lambda d\lambda\ (\lambda=\sqrt{p}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.8)，(4.9) より (4.7) は，

$$Q(\beta,\ t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda^2 t}}{\lambda}\sin\ \beta\lambda d\lambda \tag{4.10}$$

となる．これを（4.6）に代入して，ステップ関数の性質 $\theta(1-x)+\theta(x-1)=1$ を利用して式を整理すると，解 $U(x,\ t)$ は

$$U(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda^2 t}}{\lambda}(1-\cos\lambda)\sin x\lambda d\lambda \tag{4.11}$$

と求まる．

4.3　フーリエ変換を用いる方法

3.3と同様に，常微分方程式(4.2)をフーリエ変換

を利用して解くことを考える．（4.3b）から $\bar{U}(x,\ s)$ は有界なので

$$\bar{U}(x,\ s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty S(\alpha,\ s)\sin\alpha x\,d\alpha \tag{4.12}$$

のように正弦変換 $S(\alpha,\ s)$ を用いてフーリエ積分の形に表すことができる．これが境界条件（4.3a）を満たすことは容易にわかる．（4.12）を（4.2）に代入すると，

$$(\text{左辺})=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (\alpha^2+s)S(\alpha,\ s)\sin\alpha x\,d\alpha \tag{4.13}$$

となる．$f(x)=1(0\leqq x\leqq 1)$，$0(x>1)$ の正弦変換は容易に計算できることから，

$$(\text{右辺})=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)\sin\alpha x d\alpha \tag{4.14}$$

が得られる．(4.13)と(4.14)を比べると，$S(\alpha,\ s)$ が得られ，それを(4.12)に代入すると，

$$\bar{U}(x,\ s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)\frac{\sin\alpha x}{\alpha^2+s}\,d\alpha \tag{4.15}$$

となる．これをラプラス逆変換すると（4.11）に一致することは容易にわかる．

4.4　x に関してもラプラス変換を用いる方法

常微分方程式(4.2)を x に関するラプラス変換を用いて解くことを考える．$\bar{\bar{U}}(p,\ s)=\mathcal{L}_x\bar{U}(x,\ s)$ とするとき，初期条件（4.3a）を利用して（4.2）の両辺を x についてラプラス変換すると，

$$(p^2-s)\,\bar{\bar{U}}(p,\ s)-v_0=\frac{e^{-p}-1}{p}$$

となる．ここで，$v_0=\bar{U}_x(0,\ s)$としている．これより，次式を得る．

$$\bar{\bar{U}}(p,\ s)=\frac{e^{-p}}{p(p^2-s)}-\frac{1-pv_0}{p(p^2-s)} \tag{4.16}$$

右辺を部分分数分解して，3.4と同様にラプラス逆変換すると次式を得る．

$$\bar{U}(x,\ s)=\theta(x-1)\frac{1}{s}\Big[\cosh\sqrt{s}\,(x-1)-1\Big]$$
$$-\frac{1}{s}\Big[\cosh\sqrt{s}\,x-1\Big]+\frac{v_0}{\sqrt{s}}\sinh\sqrt{s}\,x \tag{4.17}$$

この式で $x\to\infty$ としたとき，（4.3b）より $\bar{U}(x,\ s)$ は有界であるという条件から $v_0=(1-e^{-\sqrt{s}})/\sqrt{s}$ が得られる．これを（4.17）に代入すると

$$\bar{U}(x,\ s)=\theta\,(x-1)\,\frac{-2+e^{\sqrt{s}(x-1)}+e^{-\sqrt{s}(x-1)}}{2s}$$
$$+\frac{2-2e^{-\sqrt{s}\,x}-e^{\sqrt{s}(x-1)}+e^{-\sqrt{s}\,(x+1)}}{2s} \tag{4.18}$$

となる．ここで，$\theta(x-1)+\theta(1-x)=1$ を利用してうまくまとめると（4.5）に一致し，後は同様にして $U(x,\ t)$ を求めることができる．

5.　まとめ

応用数学教育における一つの教材研究として，1 次元熱伝導に関する境界値問題の解法を積分変換と複素関数を利用するという立場から考えた．棒の長さは，有限のときと半無限のときの 2 つの場合を扱った．いずれも，はじめは時間 t に関してラプラス変換（s 空間）して座標 x に関する常微分方程式をつくり，その後は考えられる種々の方法で解くことを試みた．その結果，次のことがわかった．

1）x に関する常微分方程式を解いて，その解をラプラス逆変換するときに，ブロムウイッチ積分を利用するのは良い方法であることが確認できた．しかし，その解を表す関数形は一般に 2 価関数$\sqrt{s}$ を含むのでその複素積分はかなり難しい．そのときの積分の方法を詳しくかつわかりやすく与えた．

2）x に関する常微分方程式を解くのに，境界条件を取り込むように座標に関してフーリエ級数またはフーリエ変換を利用して，s を係数部分に含ませて分離してしまうと，係数は容易にしかも簡単な形に求まる．そして，この係数のラプラス逆変換は極めて容易である．これより，この解法が最も容易であることが明らかになった．その理由は，熱伝導方程式が座標に関する三角関数をもともとの解として持っているためである．

3）x に関する常微分方程式を，x に関してもラプラス変換（p 空間）して解くことはできるが，簡単ではないことがわかった．その理由の 1 つは，与えられた境界条件とは異なる棒の端での条件が入り込み得ることである．もう 1 つは，棒が有限長のときに起こることで，ラプラス変換における定義域は半無限であるが，未知関数の定義域は棒の範囲にあるため未定義領域における扱いが問題になるからである．

以上のことから，冒頭において，目的に掲げたように，常微分方程式，フーリエ解析，ラプラス変換および複素関数論が，境界値問題の解法において重要な役割を演じていて，相互に繋がっていることがわかって戴けたと考えている．従って，他の数学も

含めてこれらの数学および応用数学に関する教育を強く推進して行かなければならない．また，ラプラス逆変換は表を利用して行われることも多いが，ブロムウイッチ積分の計算ができればそれに頼る必要はない．表を利用するのは，複素関数論を学んでいないために起こることかも知れない．

付録．　熱伝導方程式の無次元化

1次元の熱伝導に関する境界値問題

$$\rho c\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 U(x,\ t)}{\partial x^2} \qquad \text{(A.1a)}$$

境界条件：「$U(0,\ t)=0,\ U(l,\ t)=0,$
$U(x,\ 0)=ax$」　(A.1b)

は，変数の無次元化 $X=x/l,\ T=\kappa(\rho c l^2)^{-1}t,\ u(X,\ T)=(la)^{-1}U(x,\ t)$ により境界値問題

$$\frac{\partial u(X,\ T)}{\partial T}=\frac{\partial^2 u(X,\ T)}{\partial X^2} \qquad \text{(A.2a)}$$

境界条件：「$u(0,\ T)=0,\ u(1,\ T)=0,$
$u(X,\ 0)=X$」　(A.2b)

に変換することができる．従って，（A.1）の境界値問題を解くには一般性を失うことなく（A.2）を解けば良いことがわかる．

参考文献

[1] 矢野健太郎・石原繁：「解析学概論（新版）」，裳華房.
[2] 矢野健太郎・石原繁：「基礎解析学（改訂版）」，裳華房.
[3] 寺澤寛一：「自然科学者のための数学概論」，岩波書店.
[4] I. N. Sneddon : *Elements of Partial Differential Equations*, McGraw-Hill（1957）.
[5] スミルノフ：「高等数学教程 IV，第三分冊」（古屋茂，鈴木一正，山中健　訳），共立出版.
[6] R・クーラン・D・ヒルベルト：「数理物理学の方法 3，4」（斎藤利弥監訳），東京図書.
[7] 長倉，井口，江沢，岩村，佐藤，久保　編集：「理化学辞典」（第 5 版），岩波書店.
[8] 森口繁一，宇田川銈久，一松信：「数学公式 II，III」，岩波書店.
[9] 竹内端三：「函数概論」，共立出版.