境界値問題への積分変換と複素積分の応用Ⅱ

—応用数学における教材研究—

森　本　真　理・成　田　　　章

Applications of Integral Transformation and Complex Contour Integral to Boundary Value Problem Ⅱ
— Study of Teaching Material in Applied Mathematics —

Mari MORIMOTO and Akira NARITA

（2007年11月30日受理）

We have seen in the previous paper [1] that the boundary value problem was useful for a training of the applied mathematical education, in which the one-dimensional heat conduction equation was treated as an example. In finding the solutions, we used the Laplace and Fourier transformations, and the Bromwich complex integral. In this paper, we find the Laplace inverse transformation of the transform derived in [1] making use of the appropriate formulae in Table of mathematical handbook. It is shown that the inverses are represented using the Gauss's error function, and is also proved that they are equivalent to those in [1].

KEYWORDS : boundary value problem, Laplace inverse transformation, formula in the transformation table, Gauss's error function.

1.　はじめに

［1］では，境界値問題を通して，高専における応用数学で学習した多くの数学を取り上げることが出来ることを見てきた。特に，熱伝導方程式では

1）時間 t に関するラプラス変換

2）ブロムウィッチ積分を利用したラプラス逆変換

3）フーリエ級数を用いる方法

4）座標 x に関してもラプラス変換を用いる方法

5）ラプラス逆変換表を用いる方法

の各手法を用いることができる。

1)～4）に関しては，［1］において考察した。ここでは，5）についての考察を行う。つまり，公式集［5］のラプラス逆変換表を用いることにより，解をガウスの誤差関数［6］で表す。また，それが［1］の手法で求めた解と同等であることも示す。

2.　有限長の棒における熱伝導

［1］で扱った有限長の棒における一次元熱伝導問題に関する境界値問題は次のものであった。

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

$$U(0,t)=0 \tag{2.2a}$$

$$U(1,t)=0 \tag{2.2b}$$

$$U(x,0)=x \tag{2.2c}$$

ここで式(2.2）は境界条件である。全ての境界条件を満足する $U(x,t)$ の t に関するラプラス変換 $\overline{U}(x,s)$ が

$$\overline{U}(x,s)=\frac{x}{s}-\frac{\sinh\sqrt{s}\,x}{s\sinh\sqrt{s}} \tag{2.3}$$

で与えられることは［1］で導出された。

ここでは，このラプラス逆変換を逆変換表を利用

することにより求め，次にそれが［1］で求めたブロムウィッチ積分による表現と一致することを示す。

2.1　ラプラス逆変換表を用いる方法

公式集［5］を利用することにより，(2.3) のラプラス逆変換を計算する。

$$U(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\overline{U}(x,s)$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\frac{x}{s}-\mathcal{L}^{-1}\frac{\sinh\sqrt{s}\,x}{s\sinh\sqrt{s}} \tag{2.4}$$

より，$t>0$ であることから，第1項は x となる。第2項の計算がここでの目的で，逆変換表を利用して実行する。[5] の『関数に演算を施したときのラプラス変換』の表における公式を適用する。それは

$$\mathcal{L}^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{s}}g(\sqrt{s})=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\infty}e^{-u^2/(4t)}f(u)du \tag{2.5}$$

$$f(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{su}g(s)ds=\mathcal{L}^{-1}g(s) \tag{2.6}$$

である。ここで，c は複素 s 平面上において，$g(s)$ の極の全てが直線 $Re(s)=c$ の左側にあるように選ばれる任意の実数である。

$$g(s)=\frac{\sinh sx}{\sqrt{\pi}\,s\sinh s} \tag{2.7}$$

とおくと，式(2.4) の右辺第2項の逆変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\sinh\sqrt{s}\,x}{s\sinh\sqrt{s}}=\mathcal{L}^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{s}}g(\sqrt{s}) \tag{2.8}$$

と書くことが出来る。この式の右辺は公式(2.5) の左辺に等しいので，この計算のためには $f(u)$ がわからなければならない。$f(u)$ は式(2.6) で与えられるので，$\mathcal{L}^{-1}g(s)$ を求めなければならない。

しかし，$g(s)$ の逆変換は，[5] の逆変換表には掲載されていないので，それを求めるには少しの工夫が必要となる。ここでは，最後まで公式集を用い，解をガウスの誤差関数で表す。次の節では，ブロムウィッチ積分を利用することにより，[1] と同じ結果が得られることを検証する。

まず，$g(s)$ を定義に基づいて指数関数に戻し，$1/(1-x)$ のマクローリン展開を利用して $1/(1-e^{-2s})$ を展開すると，

$$\sqrt{\pi}\,g(s)=\frac{1}{s}\,\frac{e^{s(x-1)}-e^{-s(x+1)}}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{e^{s(x-1)}-e^{-s(x+1)}}{s}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2sn}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-s(2n+1-x)}}{s}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-s(2n+1+x)}}{s} \tag{2.9}$$

が得られる。また，[5] より，$\mathcal{L}^{-1}e^{-as}/s=\theta(u-a)$ $(a>0)$ である。ここで，$\theta(u-a)$ はステップ関数で $\theta(u-a)=1(u>a)$，$0(u<a)$ で定義される。これを用いると，$f(u)$ は (2.6)，(2.9) より

$$\sqrt{\pi}f(u)=\mathcal{L}^{-1}\sqrt{\pi}g(s)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\theta(u-(2n+1-x))$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\theta(u-(2n+1+x)) \tag{2.10}$$

となる。この $f(u)$ を (2.5) に代入すると，式(2.8) つまり式(2.4) の右辺第2項は

$$\mathcal{L}^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{s}}g(\sqrt{s})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{2n+1-x}^{\infty}e^{-u^2/4t}du-\int_{2n+1+x}^{\infty}e^{-u^2/4t}du\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n+1-x}^{2n+1+x}e^{-u^2/4t}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^{2n+1+x}e^{-u^2/4t}du-\int_0^{2n+1-x}e^{-u^2/4t}du\right\}$$

となる。これをガウスの誤差関数

$$\mathrm{Erf}(x)=\int_0^x e^{-v^2}dv \tag{2.11}$$

で表すことを考える。そこで，$v=u/(2\sqrt{t})$ とおいて変数変換をすると，

$$\mathcal{L}^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{s}}g(\sqrt{s})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mathrm{Erf}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \tag{2.12}$$

(2.12) を (2.4) に代入すると，

$$U(x,t)$$
$$=x-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mathrm{Erf}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \tag{2.13}$$

となり，これが公式だけを用いた解である。誤差関数で表されているのがその特徴である。

2.2　前回の解との等価性

ここでは，(2.6) の $\mathcal{L}^{-1}g(s)$ をブロムウィッチ積分を計算することにより $f(u)$ を求め，ここから，[1] における解(3.10) と一致するところを見る。

(2.6) と式(2.7) より

$$\mathcal{L}^{-1}g(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{su}\frac{\sinh sx}{\sqrt{\pi}\,s\sinh s}\,ds \qquad (2.14)$$

である。これは $g(s)$ が $\sqrt{s}$ を含まないことから 1 価関数の積分となり，2 価関数を扱わなければならなかった [1] の (3.8b) の解法より容易に扱える。

関数 $g(s)$ の極は，$s=0$，$\sinh s=0$ を満たす s となる。後者の解は，$s_n=n\pi i(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ であり，$s_n(\mathrm{n}\neq0)$ は $g(s)$ の 1 位の極となる。また，$s=0$ は 2 位の極のように見えるが，分子も $s=0$ で 0 になることを考慮して，$g(s)$ を s に関して Laurent 展開すると $s_0=0$ も 1 位の極であることがわかる。

ブロムウィッチ積分 (2.14) を求めるには，Fig.1 に示した閉じた積分路を用いる。つまり，(2.14) は Fig.1 に示した路における積分の値に等しい。そのとき，直線 AB は，s_n の右側にあるように選ばれる。その積分の値は，留数定理より，積分路内にある全ての極における留数の和に等しい。s_0 での留数を計算すると，$\mathrm{Res}[e^{su}\sqrt{\pi}\,g(s),0]=x$ である。また，$s_n(\mathrm{n}\neq0)$ における留数は，ロピタルの定理を用いることにより，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}[e^{su}\sqrt{\pi}\,g(s),s_n]\\&=\lim_{s\to s_n}(s-s_n)\left\{\frac{e^{su}\sinh sx}{s\sinh s}\right\}\\&=\frac{e^{s_nu}\sinh s_nx}{s_n}\lim_{s\to s_n}\frac{s-s_n}{\sinh s}\\&=\frac{e^{s_nu}\sinh s_nx}{s_n}\lim_{s\to s_n}\frac{1}{\cosh s}\\&=\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^ne^{n\pi iu}}{n}\sin n\pi x \qquad (2.15)\end{aligned}$$

となる。よって，(2.14) はこれらの和で求まる。

$$\begin{aligned}&\sqrt{\pi}\mathcal{L}^{-1}g(s)=\sqrt{\pi}f(u)\\&=x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^ne^{n\pi iu}}{n}\sin n\pi x\\&\qquad+\frac{1}{\pi}\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^ne^{n\pi iu}}{n}\sin n\pi x\\&=x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos n\pi u\ \sin n\pi x \qquad (2.16)\end{aligned}$$

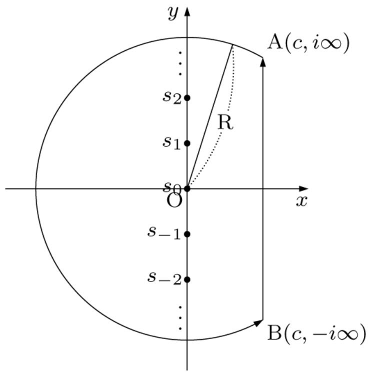

Fig. 1

ここで，$e^{n\pi ui}+e^{-n\pi ui}=2\cos n\pi u$ を用いた。(2.16) を (2.5) に代入すると

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{p}}g(\sqrt{s})\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left\{x\int_0^{\infty}e^{-u^2/(4t)}du+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\right.\\&\left.\times\sin n\pi x\int_0^{\infty}e^{-u^2/(4t)}\cos n\pi u\,du\right\} \qquad (2.17)\end{aligned}$$

を得る。中括弧内の第 1 項は，変数変換 $v=u/2\sqrt{t}$ を行うと次のようになることは容易にわかる。

$$\int_0^{\infty}e^{-u^2/(4t)}du=2\sqrt{t}\int_0^{\infty}e^{-v^2}dv=\sqrt{\pi t} \qquad (2.18)$$

また，第 2 項は被積分関数が偶関数なので，積分範囲を $(-\infty,\infty)$ に拡張することができる。ただし，そのとき因子 1/2 を掛けておかなければならない。こうすることにより，さらに $\cos n\pi u$ を $e^{in\pi u}$ で置き換えることができる。それは，$e^{in\pi u}$ に含まれる $\sin n\pi u$ が奇関数であるため積分によって 0 になるからである。そして，指数部を $-u^2/(4t)+in\pi u=-n^2\pi^2t-(u-i2n\pi t)^2/(4t)$ のように変形して，変数変換 $w=(u-i2n\pi t)/2\sqrt{t}$ を行う。このとき積分範囲は，$u:-\infty\to\infty$ より，$w:-\infty+i2n\pi t\to\infty+i2n\pi t$ と変換される。この w に関する複素積分は，w 平面上の 4 点 $-L+ia$, $L+ia$, L, $-L$ $(L\to\infty,\ a=2n\pi t)$ を頂点とする長方形の周上で関数 e^{-w^2} をコーシーの定理を適用して積分することにより，$w:-\infty\to\infty$（実軸上）における積分に一致することがわかる。よって，次が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/(4t)} e^{in\pi u}\, du$$
$$= e^{-n^2\pi^2 t} 2\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw$$
$$= 2\sqrt{\pi t}\, e^{-n^2\pi^2 t} \tag{2.19}$$

(2.18)，(2.19) を (2.17) に代入すると，

$$\mathcal{L}^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{p}}g(\sqrt{s})$$
$$= x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \tag{2.20}$$

となり，これを (2.4) に戻すと次のようになる。

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \tag{2.21}$$

これより，公式集を用いて解いた場合も [1] の (3.10) と全く同じ値となることがわかった。

3.　半無限長の棒における熱伝導

次に，半無限長の棒における熱伝導問題を考える。[1] で熱伝導方程式 (2.1) を境界条件

$$U(0, t) = 0 \tag{3.1a}$$
$$|U(x, t)| \leqq M \tag{3.1b}$$
$$U(x, 0) = f(x) \tag{3.1c}$$

のもとで解くことを考えた。ただし，M は正の定数であり，$f(x) = 1(0 \leqq x \leqq 1)$，$0(x > 1)$ である。

[1] で $U(x, t)$ のラプラス逆変換 $\overline{U}(x, s)$ は次のように求められた。

$$U(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\overline{U}(x, s)$$
$$= \theta(1-x) + Q(1+x, t) - 2Q(x, t)$$
$$-\theta(1-x)Q(1-x, t) + \theta(x-1)Q(x-1, t) \tag{3.2}$$

ここで，$Q(\beta, t)$ は

$$Q(\beta, t) = \mathcal{L}_t^{-1}\frac{1}{2s}e^{-\beta\sqrt{s}} \quad (\beta > 0) \tag{3.3}$$

で与えられ，$\beta = x,\ 1-x,\ x \pm 1$ である。ここでは，$e^{-\beta\sqrt{s}}/(2s)$ に表を利用して逆変換 $Q(\beta, t)$ を求めて，次に $U(x, t)$ を求めることを考える。また，その $U(x, t)$ が [1] でのものに一致することも示す。

3.1　ラプラス逆変換表を用いる方法

公式集 [5] を利用するため，

$$g(s) = e^{-\beta s}/(2\sqrt{\pi}s) \tag{3.4}$$

とおき，

$$Q(\beta, t) = \mathcal{L}_t^{-1}\sqrt{\pi/s}\, g(\sqrt{s}) \tag{3.5}$$

を求める。(2.6) より，$f(u)$ を求める必要性があるが，

$$f(u) = \mathcal{L}^{-1}g(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\theta(u-\beta) \tag{3.6}$$

となる。ここで，$\mathcal{L}^{-1}e^{-as}/s = \theta(u-a)(a>0)$ を用いた。これを式(2.5) に代入すると次の式を得る。

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-u^2/(4t)}\theta(u-\beta)du$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\beta}^{\infty} e^{-u^2/(4t)}du \tag{3.7}$$

$v = u/(2\sqrt{t})$ とおいて変数を変換すると，

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\beta/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-v^2}dv$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\mathrm{Erf}(\infty) - \mathrm{Erf}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\right) \tag{3.8}$$

(3.8) を (3.2) に代入して計算する。簡単のために，$\mathrm{Erf}(\beta/(2\sqrt{t})) = \phi(\beta)$ とおく。このとき，$\phi(\alpha)$ は $\alpha > 0$ である必要性はないことに注意する。e^{-v^2} が偶関数であることから，$\phi(\alpha) = -\phi(-\alpha)$ となり，$\theta(x-1) + \theta(1-x) = 1$ に注意すると，

$$U(x, t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\{2\phi(x) - \phi(x+1)$$
$$+\theta(1-x)\phi(1-x) - \theta(x-1)\phi(x-1)\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\{2\phi(x) - \phi(x+1) - \phi(x-1)\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{2\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right.$$
$$\left. -\mathrm{Erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \mathrm{Erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \tag{3.9}$$

これが，公式集を利用して，誤差関数で表した解となる。

3.2　前回の解との等価性

（3.8）より，$1=2Q(0,t)$ が得られる。これを利用し，$\theta(x-1)+\theta(1-x)=1$ に注意しながら（3.2）を計算すると，

$$\begin{aligned}U(x,t)=&\theta(1-x)\{Q(0,t)-Q(1-x,t)\\&\qquad+Q(0,t)-Q(x,t)\}\\&+\theta(x-1)\{Q(x-1,t)-Q(x,t)\}\\&+Q(x+1,t)-Q(x,t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

となる。ここで，

$$R(a,b)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_a^b e^{-u^2/(4t)}du \tag{3.11}$$

とおく。このとき，$a, b>0$ である必要はないことに注意する。$R(a,b)=Q(a,t)-Q(b,t)$ となり，$e^{-u^2/(4t)}$ が偶関数であることから，$R(0,b)=R(-b,0)$ が得られる。また，$R(a,0)+R(0,b)=R(a,b)$ であることから，（3.10）は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}U(x,t)=&\theta(1-x)\{R(x-1,0)+R(0,x)\}\\&+\theta(x-1)R(x-1,x)+R(x+1,x)\\=&R(x-1,x)+R(x+1,x)\end{aligned}\tag{3.12}$$

公式集［4］の

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-u^2/(4t)}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda u\,d\lambda$$

を利用すると，

$$R(a,b)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda u\,d\lambda\,du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda^2 t}}{\lambda}(\sin\lambda b-\sin\lambda a)d\lambda \tag{3.13}$$

となることから，（3.12）は，次のようになる。

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda^2 t}}{\lambda}[2\sin\lambda x$$

$$-\{\sin\lambda(x-1)+\sin\lambda(x+1)\}]d\lambda$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda^2 t}}{\lambda}(1-\cos\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \tag{3.14}$$

（3.14）から，公式集を用いて解いた場合も［1］の（4.11）と同じ結果を得ることがわかった。

4.　まとめ

［1］では，１次元熱伝導方程式に関する境界値問題を，積分変換と複素関数を利用するという手法で解いた。そこでは，ラプラス逆変換にブロムウィッチ積分という複素積分を用いたが，ここでは，公式集における逆変換表を用いて求めた。その結果，有限長および半無限長の棒の両方の場合について，逆変換は［1］で求めた関数形とは異なり，ガウスの誤差関数を用いて表されることがわかった。従って，表を用いたとき，逆変換が誤差関数で与えられるのは１つの重要な特徴と理解されるべきである。

半無限長の棒における熱伝導の場合は，表から求めた誤差関数の形の解と前回の解との等価性を，その延長線上で自然に導きだすことが可能であった。しかし，有限長の場合は，半無限長の場合と似た手法で等価性を証明することは困難であった。結局は，その証明は，ブロムウィッチ積分（［1］での積分より容易）に頼らざるを得なかった。両方の場合で違いが生ずる理由は今の段階では不明である。

今回，応用数学の教材研究として熱伝導に関する境界値問題に挑戦してみて，複素関数の知識が大いに役立つこと，様々な積分公式に精通しかつ活用できなければならないこと，などを痛感した。そして，応用数学の授業で普段学んでいる各知識が，各方面で役立ち，工学系にとっては必要不可欠であることがわかった。本校では，４年生までで基本的な応用数学の講義が提供されている。卒業研究などの専門科目で，これらが多いに活用されることを期待したい。

参考文献

［1］森本真理，成田章：「境界値問題への積分変換と複素積分の応用 I」，秋田工業高等専門学校研究紀要，第42号，pp.74-81，(2007.2)
［2］矢野健太郎，石原繁：「解析学概論（新版）」，裳華房.
［3］矢野健太郎，石原繁：「基礎解析学（改訂版）」，裳華房.
［4］森口繁一，宇田川銈久，一松信：「数学公式 I」，岩波書店.
［5］森口繁一，宇田川銈久，一松信：「数学公式 II」，岩波書店.
［6］森口繁一，宇田川銈久，一松信：「数学公式 III」，岩波書店.
［7］スピーゲル：「ラプラス変換」（土井誠　訳），マグロウヒル.