数としての４元数

～複素数の自然な拡張として～

吉　井　洋　二・上　林　一　彦

Hamilton's quaternions as numbers
～as a natural generalization of complex numbers～

Yoji Yoshii and Kazuhiko Uebayashi

（2007年11月30日受理）

We explain the Hamilton's quaternions as numbers.　Complex numbers are usually introduced as usual polynomials in one variable x with relation $x^2=-1$.　Similarly, we introduce the quaternions as twisted polynomials in two variables x and y with relations $xy=-yx$, $x^2=-1$ and $y^2=-1$.　Then we explain a representation of rotations in space using the quaternions.

KEYWORDS : quaternion, complex number, twisted polynomial, rotation

1.　緒言

1843年（ペリー来航の10年前），物理学者ウィリアムハミルトンによって４元数が（アイルランド，ダブリンにて）発見された。この新しい数は，ベクトル解析における内積や外積などの概念を生みだし，現代物理学・数学に大きく貢献した。また，量子力学等では４元数を行列で表現し，線形演算子とみなすことで役立っている。ところがハミルトンが本来目的とした，複素数の自然な拡張としての次世代の数という観点からは遠ざかってきている。複素数が２次元の数であるという認識から，３次元の数をハミルトンは構築しようとした。しかしこれは失敗に終わった。複素数が持つ，よい性質を保ったまま３次元の数を作ることは不可能だった。ところが，ハミルトンは不可能であることを知ると同時に，４次元なら複素数とかなり似た数が作れることを発見した。この「かなり似た」という表現は，「かけ算の交換法則は成り立たない」以外は，複素数とほとんど同じに扱えるという意味である。かけ算の交換法則が成り立たないなら，もう似ているどころか，数としてさえ認めたくない，という見方も出来る。実際，当時の数学者はそう考えた。いや，現在でも行列として捉えるならいいが，数としては扱いたくないという数学者も多い。（もちろん，非可換代数を専門とする数学者にとっては，この４元数論が理論の最初であり，この概念を一般化したものが非可換代数である。）ところが，近年，空間の回転を表現するのに，行列で表すより，４元数の方が便利であるという見方が出てきた。実際，アニメーション関係のコンピュータプログラマーは４元数を駆使して複雑な回転を表している。そこで我々は，できるだけ早い段階で４元数を学校で教え，ある程度その存在と便利さを知らせておくことが大事であると考えた。現在は大学でもほとんど教えられていない４元数だが，これからは多くの分野で「数」として登場するだろうと予想される。（複素数も最初はただ便利だから使っていた。数という感覚ではなく，道具として使われていた。）

本文において，４元数は複素数と同じように導入でき，同じような性質も持つことを説明する。また，４元数を用いて空間の回転が表現できることを解説する。特にその導入は通常の方法とは少し違い，高校生，高専生にも理解し易いように，我々独自の工夫がなされている。

2.　４元数の導入

実数を係数に持つ i と j の文字式に，

$$ij=-ji \text{ と } i^2=j^2=-1$$

という関係式を入れた式を数とみなし，4元数と呼ぶ。たとえば，

$$\begin{aligned}&3i^3-2j^6+7ij-i^2j-ij^2-4ji+(ij)^2\\&\quad=-3i+2+7ij+j+i+4ij-i^2j^2\\&\quad=1-2i+j+11ij\end{aligned}$$

同様の簡約化により，4元数はいつも

$$a+bi+cj+dk,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\quad k:=ij$$

と書ける。ここで，k は ij を単に k と書いたに過ぎないということを強調しておく。(ハミルトンは i, j, k という虚数単位を最初に導入し，$ij=k$ という関係を入れた。) すると k は i, j と同様の関係式を持つことが分かる：

$$\begin{aligned}&k^2=(ij)(ij)=-i^2j^2=-1,\\&ik=i(ij)=-iji=-ki,\\&jk=j(ij)=-ijj=-kj\end{aligned}$$

さて，4元数全体の集合をハミルトンのHをとって，$\mathbb{H}$で表すことにする。

$$\mathbb{H}=\{a+bi+cj+dk\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

4元数$\mathbb{H}$が複素数

$$\mathbb{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

を部分集合として含むことは明らかであろう。

4元数$\mathbb{H}$は複素数と違って積の交換法則が成り立たないが，いろいろな面白い性質を持つ。たとえば，

$$(i+j)^2=i^2+ij+ji+j^2=i^2+j^2=-2$$

従って，

$$\left(\frac{i+j}{\sqrt{2}}\right)^2=-1$$

同様に，

$$\begin{aligned}&(bi+cj+dk)^2\\&\quad=b^2i^2+c^2j^2+d^2k^2=-b^2-c^2-d^2\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\left(\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right)^2=-1$$

が成り立つ。従って，

$$\mathbb{U}=\{bi+cj+dk\mid b^2+c^2+d^2=1\}$$

とおけば，任意の $u\in\mathbb{U}$ に対して，$u^2=-1$ が成り立つ。ここで，

$$\mathbb{I}:=\{bi+cj+dk\mid b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

を通常の xyz 空間と同一視すれば (x 軸を i 軸，y 軸を j 軸，z 軸を k 軸と考える)，$\mathbb{U}$ は通常の空間 $\mathbb{I}\approx\mathbb{R}^3$ における，原点中心の半径1の球面となる。即ち，

$$\mathbb{U}\approx S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

となる。($\mathbb{I}$ を imaginary space，$\mathbb{U}$ を imaginary unit sphere と呼んでよいだろう。)

また，

$$\{a+eu\mid a,e\in\mathbb{R}\}$$

は$\mathbb{C}$と同一視できる。即ち，$\mathbb{H}$は無限個の$\mathbb{C}$のコピーを含んでいる。さらに，

$$\mathbb{H}=\{a+eu\mid a,e\in\mathbb{R},\ u\in\mathbb{U}\}$$

と書けることに注意すれば，

$$x^2=-1$$

という方程式の解は ($\mathbb{H}$内に) 無限個あり，その解集合は$\mathbb{U}$であることがわかる。

4元数$\mathbb{H}$は4次元の数と考えてよいが，4次元は未だ人間にはよく見えない。ところが，$\mathbb{H}$の部分集合$\mathbb{I}$は3次元であり，そこでの積はとても興味深い。実際，

$$\alpha=b_1i+c_1j+d_1k,\quad \beta=b_2i+c_2j+d_2k\in\mathbb{I}$$

に対して，

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(b_1i+c_1j+d_1k)(b_2i+c_2j+d_2k)\\&=-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2\\&\quad+(c_1d_2-d_1c_2)i+(b_2d_1-b_1d_2)j+(b_1c_2-b_2c_1)k\end{aligned}$$

となる。ここで，$\mathbb{I}\approx\mathbb{R}^3$ により $\alpha=(b_1,c_1,d_1)$，$\beta=(b_2,c_2,d_2)$ と考えれば，前半は $-\alpha\cdot\beta$ になっている。では後半は何を表しているだろう？ここでもう一度，k の定義を思い出せば，$ij=k,\ jk=i,\ ki=j$ という関係があることがすぐにわかる。これは i, j, k を基本ベクトルと考えたときの外積が満たす関係式に等しい。従って，後半部分は $\alpha\times\beta$ になっているのである。即ち，

$$\alpha\beta=-\alpha\cdot\beta+\alpha\times\beta$$

である。実は，内積や外積は4元数から生まれたのである。

さて，複素数と同様，$\alpha=a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}$ に対

して，

$$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

と定義すると，$\beta\in\mathbb{H}$に対して，

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta| \qquad (\bigstar)$$

が成り立つ。（これは自明ではなく，大きな発見であった。）複素数の部分集合

$$S:=\{\alpha\in\mathbb{C}\,|\,|\alpha|=1\}$$

は積について閉じていて，この集合は複素平面の原点を中心とした半径 1 の円と同一視できた。では

$$S^3:=\{\alpha\in\mathbb{H}\,|\,|\alpha|=1\}$$

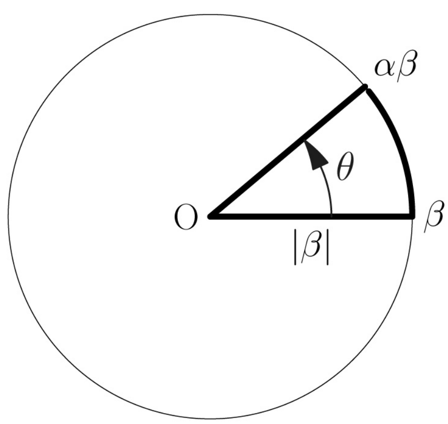
は何か？これも（★）より積について閉じていて，4 次元の中の 3 次元球と考えられる。

3.　空間の回転

複素数と$\alpha\in S$との積は回転を与える。実際，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$と書けるから，$\beta=a+bi\in\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$に対して，

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(\cos\theta+i\sin\theta)(a+bi)\\&=a\cos\theta-b\sin\theta+i(b\cos\theta+a\sin\theta)\\&\approx\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから，$\alpha\beta$の位置はβの位置を原点の周りにθだけ回転した位置にある。（最後の$\approx$は$x+yi\in\mathbb{C}$を$\mathbb{R}^2$の点（x, y）と同一視したということである。）



同様に 4 元数と$\alpha\in S^3$との積は 4 次元の回転を与える。ところが，4 次元の回転はこれまた人間の目ではほとんど見ることができない。（数学的記述は簡単だが，どのような動きかはわからない。物理学ではS^3をユニタリー群$SU(2)$と同一視して，素粒子モデルに応用している。この理論では，4 元数を数と見ず，複素数成分の 2×2 行列と見ている。）

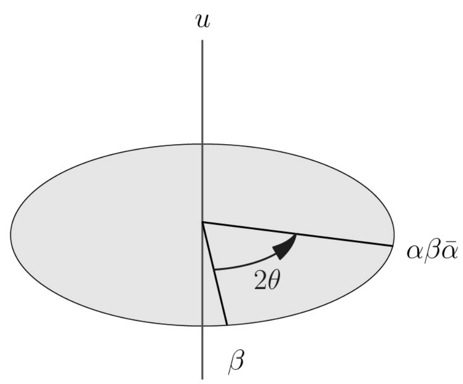
では，$\alpha\in S^3$を 3 次元（空間$\mathbb{R}^3$）の回転を表すのに使えないか？という疑問が起きる。実はこれも可能なのである。まず，準備として，$\mathbb{C}$における共役という概念を拡張する。即ち，$a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}$に対して，共役 4 元数

$$\overline{a+bi+cj+dk}=a-bi-cj-dk$$

を定義する。次に，ある$u\in\mathbb{U}$があって，$\alpha=a+eu$と書けたわけだから，$|\alpha|=1$ならば$a^2+e^2=1$であることがわかる。従って，$\alpha=\cos\theta+u\sin\theta$と書ける。このとき，$\beta\in\mathbb{I}\approx\mathbb{R}^3$に対して，$\alpha\beta\overline{\alpha}\in\mathbb{I}$が言えて，

$\alpha\beta\overline{\alpha}$の位置は$\beta$の位置を$u$軸の周りに
2θだけ回転した位置にある

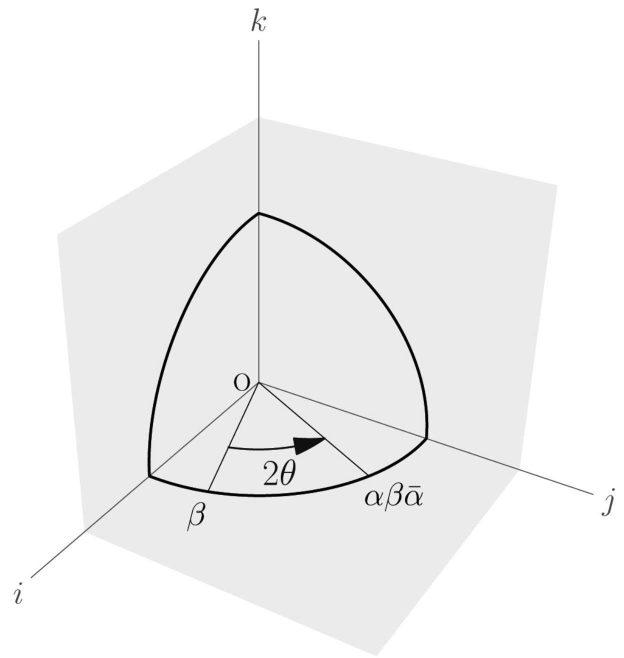
ということが証明できる。従って，θを動かしたり，uを動かたりすることにより，$\alpha=\cos\theta+u\sin\theta$は空間のすべての回転を表現することができる。



例 $u=k$の場合，即ち$\alpha=\cos\theta+k\sin\theta$ならば，$\beta=bi+cj$に対して，sin，cos の倍角の関係を利用して

$$\begin{aligned}\alpha\beta\overline{\alpha}&=(\cos\theta+k\sin\theta)(bi+cj)(\cos\theta-k\sin\theta)\\&=bi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2ci\cos\theta\sin\theta\\&\qquad+2bj\cos\theta\sin\theta+cj(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=i(b\cos2\theta-c\sin2\theta)\\&\qquad+j(b\sin2\theta+c\cos2\theta)\\&\approx\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ c\end{pmatrix}\end{aligned}$$

さらに，k成分はこの変換で不変となる:



$$\alpha(dk)\overline{\alpha}=(\cos\theta+k\sin\theta)(dk)(\cos\theta-k\sin\theta)$$
$$=(\cos\theta+k\sin\theta)(\cos\theta-k\sin\theta)(dk)$$
$$=dk$$

従って，線形写像$\alpha(\cdot)\overline{\alpha}$を表す行列は，

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。

この例が示すように，４元数による回転を行列で表すことができる。一般の$u\in\mathbb{U}$に対しては，うまく$v, w\in\mathbb{U}$を取って，$\{v, w, u\}$が$\mathbb{I}$の正規直交基底になるようにすると，v, w, uはi, j, kと同じ関係式を持つ。例えば，

$$v^2=w^2=u^2=-1,$$
$$\text{また}\quad vw=-v\cdot w+v\times w=u,$$
$$wv=-w\cdot v+w\times v=-u\quad\text{より}$$
$$vw=-wv\quad\text{等々。}$$

従って，上と全く同じ計算から，$\alpha=\cos\theta+u\sin\theta$に対して，この基底に関する，線形写像$\alpha(\cdot)\overline{\alpha}$を表す行列は上と全く同じ

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

になる。もちろん，$\alpha=\cos\dfrac{\theta}{2}+u\sin\dfrac{\theta}{2}$にとっておけば，$\alpha(\cdot)\overline{\alpha}$を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。

4.　結び

もちろん４元数などは使わず，初めから線形代数を使えば，空間の回転は上記行列で表せる。ただ，そこでは座標変換，固有値，直交行列の理論が駆使される。簡潔に言えば，ある回転を行列表現するには，まず座標系を計算しなければならない。これは言うほど易しくはない。ところが，４元数による回転の表現は，４元数のかけ算にさえ慣れておけば，より直接的で分かり易いと言える。また，空間の回転を表すのにオイラー角，あるいはロールピッチヨー法が有名だが，これらはいくつかの欠点があり（たとえばジンバルロックの問題），最近の工学者あるいはコンピュータプログラマーは，回転の表現に４元数を使うようになっている。

４元数は，空間の回転表現における利点だけに留まらず，多くの分野で今後登場してくると予想される。４元数は複素数同様の基本的な「数」になり得るので，できるだけ早い時期に学生へ教えることが重要と考える。（数の理解と語学は早いほうがよい。）

参考文献

[1] J.C. Baez, The Octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 39:145-205, 2002
[2] S.L. Altmann. *Rotations, Quaternions, and Double Groups,* Dover, 2005
[3] J.H. コンウェイ，四元数と八元数―幾何，算術，そして対称性，培風館，2006
[4] 堀源一郎，ハミルトンと四元数，海鳴社，2007