

# スライディングモード制御を用いた回転型倒立振子の 振り上げ安定化制御

加 賀 達 也\*・木 澤 悟

## Swing-up and Stabilization Control for a Rotational Inverted Pendulum by Sliding Mode Control Method

Tatsuya KAGA\* and Satoru KIZAWA

(平成21年11月27日受理)

This paper presents the control of an under actuated system called the Rotational Inverted Pendulum composed of arm and pendulum. We divide a control area into two areas, a swing-up control area and stabilization control area. The swing-up control is to move the pendulum, from its stable downward position to its unstable inverted position, and the stabilization control is to balance the pendulum about the vertical. We describe about a swing-up controller using energy method, and a stabilization controller using sliding mode control method which has a good robustness property for disturbances. Consequently, we achieved the stabilization of the state variables, namely, angle and angular velocity of arm and pendulum. The effectiveness of two proposed control laws is shown by simulations and experiments.

KEYWORD : Rotational inverted pendulum, Sliding mode control method, Robust control

### 1. 緒 言

人型ロボットに代表される機械力学系の多くは、アクチュエータの数が動作関節の数よりも少ない劣駆動システムである。これまで、劣駆動システムの研究<sup>1)</sup>は多く行われてきており、これは、劣駆動システムが強い非線形性を有し、線形制御理論を直接的に適用できないことに起因している。

これまで筆者らは、劣駆動システムである回転型倒立振子を用い、倒立振子の振り上げ安定化制御に対して、種々の制御則の有効性を検証してきた<sup>4)</sup>。以前の研究報告<sup>5)</sup>では、システムの不確かさに対して優れたロバスト性を有するスライディングモード制御を安定化制御に適用し、倒立振子の振り上げ安定化制御を試みた。しかし、振子を安定倒立させることはできなかった。この原因としては、システムを平衡状態に近づけるための制御入力のゲインを

定数としており、状態量の状況に関わらず一定のゲインを与えていたことに起因していると考えられる。そこで、本研究では、状態量に応じてゲインが変化するようにゲインを状態量の関数にし、倒立振子の振り上げ安定化制御およびアームを平衡状態にすることを試みた。そして、スライディングモード制御法に基づく制御手法<sup>2), 3)</sup>が、振り上げ領域から安定化領域へのスムーズな遷移と十分な安定化制御に有効であることを、シミュレーションおよび実験によって検証した。

### 2. システムの概要

Fig. 1 に本研究で使用した回転型倒立振子システムを示す。また、Fig. 2 に模式的なシステム構成図を示す。アームに取り付けられたDCギヤードモータのロータリーエンコーダと、振子に取り付けられたロータリーエンコーダの角度信号は、Quanser社製のMulti Q-PCI (カウンタ) を介してパソコンへと送られる。また、指令信号は制御則に基づいて

\* 秋田高専専攻科学生

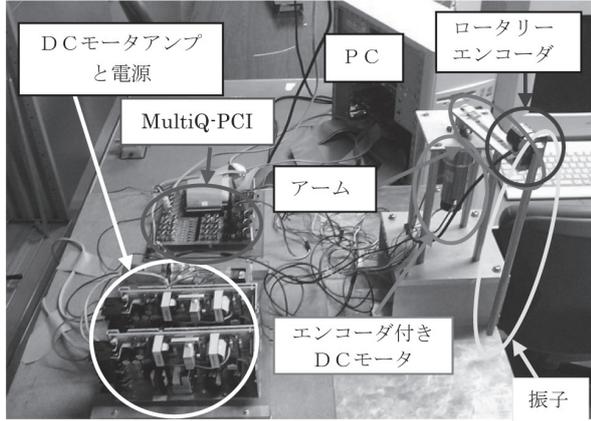


Fig. 1 回転型倒立振りシステム

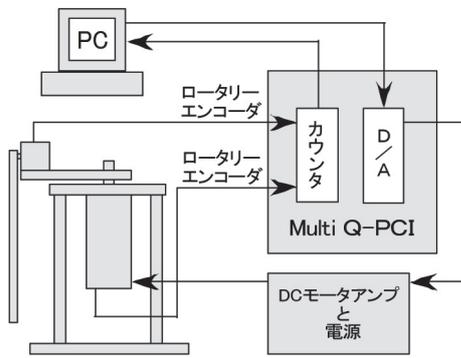


Fig. 2 システム構成図

Multi Q-PCI (D/Aコンバータ) からモータアンブを介してDCモータへと送られる。

### 3. 回転型倒立振り子のモデル化

#### 3.1 非線形運動方程式の導出

この節では、ラグランジュの運動方程式を用いて、回転型倒立振り子をモデル化したFig. 3の運動方程式を導出する。モータの動特性を考慮し、アームに与えられるトルク $\tau$ とモータ端子電圧 $V$ との関係を含めた非線形な運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} J_b + m_p r^2 + m_p l_p^2 \sin^2 \alpha + J_m n^2 & -m_p r l_p \cos \alpha \\ -m_p r l_p \cos \alpha & m_p l_p^2 + I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} m_p l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2\alpha & m_p r l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \\ -m_p l_p^2 \dot{\theta} \sin \alpha \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} C_a + \frac{K_T K_E n^2}{R_a} & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p g l_p \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_T n}{R_a} \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (1)
 \end{aligned}$$

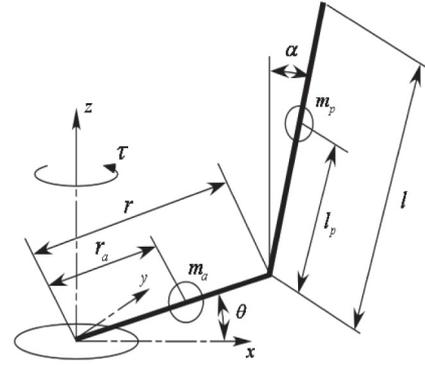


Fig. 3 回転型倒立振り子モデル

- $\theta$  : アーム角度
- $\alpha$  : 振り子角度
- $m_a$  : アーム質量
- $m_p$  : 振り子質量
- $r$  : アーム長さ
- $l$  : 振り子長さ
- $r_a$  : アームの重心までの長さ
- $l_p$  : 振り子の重心までの長さ
- $I_a$  : アームの重心まわりの慣性モーメント
- $I_p$  : 振り子の重心まわりの慣性モーメント
- $J_b$  :  $I_a$ と取り付け部品を含めた慣性モーメント
- $c_a$  : アームの粘性摩擦係数
- $c_p$  : 振り子の粘性摩擦係数
- $J_m$  : モータの慣性モーメント
- $R_a$  : 直流抵抗 (アマチュア抵抗)
- $K_E$  : 誘起電圧定数
- $K_T$  : トルク定数
- $\tau$  : モータトルク
- $n$  : ギヤ比
- $V$  : モータ端子電圧
- $g$  : 重力加速度

また、実測、実験によって測定した、アームと振り子の物理パラメータおよびDCモータのパラメータをTable 1~3に示す。

#### 3.2 状態方程式の導出

本研究の目的は、振り子を安定倒立させること、すなわち平衡状態 $\alpha = 0$  [rad],  $\dot{\alpha} = 0$  [rad/s] に漸近安定させることである。振り子が平衡点近傍にあるとき、

Table 1 アームの物理パラメータ

記号	物理パラメータ	数値
$m_a$	アーム質量	0.0559 [kg]
$r$	アーム長さ	0.138 [m]
$r_a$	アームの重心までの長さ	0.069 [m]
$I_a$	アーム重心まわりの慣性モーメント	$9.29 \times 10^{-5}$ [kg·m <sup>2</sup> ]
$c_a$	アームの粘性摩擦係数	$1.29 \times 10^{-3}$ [kg·m <sup>2</sup> ]
$J_b$	$I_a$ と取り付け部品を含めた慣性モーメント	$1.76 \times 10^{-3}$ [kg·m <sup>2</sup> ]

Table 2 振子の物理パラメータ

記号	物理パラメータ	数値
$m_p$	振子質量	0.067 [kg]
$l$	振子長さ	0.318 [m]
$l_p$	振子の重心までの長さ	0.1585 [m]
$I_p$	振子重心まわりの慣性モーメント	$7.48 \times 10^{-4}$ [kg·m <sup>2</sup> ]
$c_p$	振子の粘性摩擦係数	$1.158 \times 10^{-4}$ [kg·m <sup>2</sup> ]

Table 3 DCモータのパラメータ

記号	物理パラメータ	数値
$J_m$	モータの慣性モーメント	$2.19 \times 10^{-6}$ [kg·m <sup>2</sup> ]
$n$	ギヤ比	29.47
$K_E$	誘起電圧定数	$3.06 \times 10^{-2}$ [V/(rad/s)]
$K_T$	トルク定数	$3.038 \times 10^{-2}$ [Nm/A]
$R_a$	直流抵抗 (アマチュア抵抗)	5.7 [Ω]

システムは運動方程式を線形化した状態方程式に則って運動する。そこで、システムの運動方程式(1)を線形化し、状態方程式を次のように導出する。

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \\ y_p = C_p x_p \end{cases} \quad (2)$$

ここで、

$$A_p = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ E^{-1}A_2 & E^{-1}A_1 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ E^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} J_b + m_p r^2 + J_m n^2 & -m_p r l_p \\ -m_p r l_p & I_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -c_a - \frac{K_T K_E n^2}{R_a} & 0 \\ 0 & -c_p \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_p g l_p \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{K_T n}{R_a} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_p = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T, \quad u = V$$

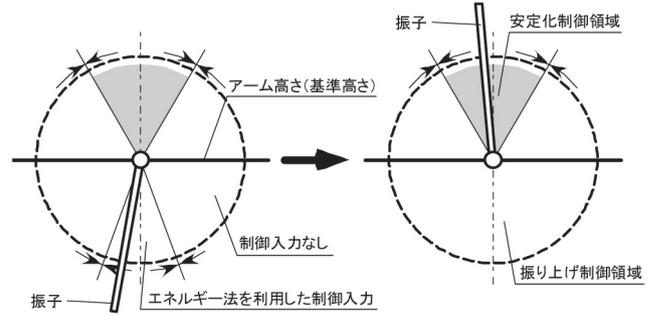
である。

## 4. 振り上げ制御および安定化制御の設計

### 4.1 各領域における制御の切り替え

緒言で述べたように、劣駆動システムは強い非線形性を有しているため、線形制御理論を直接的に利

用することができない。そこで本研究では、Fig. 4(b)に示すように、振子の動作領域を振り上げ制御を行う非線形領域と安定化制御を行う線形化可能領域の二つに分割し、非線形領域ではエネルギー法に基づく振り上げ制御、線形化可能領域ではスライディングモード制御による安定化制御を行った。この章では各制御方法の設計について記述する。



(a) 振り上げ制御 (b) 安定化制御

Fig. 4 制御領域の分割

### 4.2 エネルギー法を利用した振り上げ制御

本研究では、振り上げ領域において、システムの力学的エネルギーを常に増大させる手法であるエネルギー法を利用した振り上げ制御を試みた。力学的エネルギーを常に増大させる制御入力（モータ端子入力  $V$ ）の導出を以下に記述する。本実機の力学的エネルギーの時間変化量  $\dot{E}$  は次式で与えられる。

$$\dot{E} = \bar{K}V - \bar{C}\dot{\theta} - \frac{C_p \dot{\alpha}^2}{\dot{\theta}} > 0 \quad (3)$$

ただし、

$$\bar{K} = \frac{nK_T}{R}, \quad \bar{C} = Ca + \frac{n^2 K_E K_T}{R}$$

である。ここで、第1項はモータの動特性を考慮した制御入力項、第2項はアームにかかる粘性力項とモータにかかる慣性力項、第3項は振子にかかる粘性力項を表している。さらに、

$$u_2 = \bar{K}V - \bar{C}\dot{\theta} \quad (4)$$

とおくと、式(3)は次式に変換される。

$$\dot{E} = u_2 - \frac{C_p \dot{\alpha}^2}{\dot{\theta}} > 0 \quad (5)$$

この式から、

$$u_2 = \begin{cases} u_{2\max} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) & |\dot{\theta}| < \varepsilon \\ \frac{C_p \dot{\alpha}^2}{\dot{\theta}} + \gamma \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) & |\dot{\theta}| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (6)$$

が得られる。ここで、 $u_{2\max}$  は最大入力電圧25[V]、 $\gamma > 0$  はエネルギー増加のための微小項、 $\varepsilon > 0$  は $u_2$  の発散を防ぐための微小項である。よって、式(4)から制御入力 $u$ の計算式は次のように導出できる。

$$V = \frac{I}{K} (u_2 + \bar{C}\dot{\theta}) \quad (7)$$

しかし、式(7)において制御入力の符号はアーム角速度 $\dot{\theta}$ の符号に依存しており、式(7)に示した制御入力ではアームが片方の向きに回転し続けるため、振子に振り子運動させることができず、倒立状態に持っていきができなかった。そこで今回は、さらにFig. 5(a)に示すように振り上げ制御領域を、エネルギー法を適用する領域（真下を $0^\circ$ として $\pm 30^\circ$ ）と適用しない領域に分割し、アームが一方向に回ることを防ぎ、アームに周期的に折り返す動作を行わせた。

### 4.3 スライディングモード制御の設計

この節では、安定化制御として用いた、状態量を平衡点に漸近安定化させるスライディングモード制御法について記述する。

#### 4.3.1 最適な切換超平面の設計

スライディングモード制御は、システムの状態を切換超平面に漸近させ、拘束する制御である。そのため、切換超平面の設計はスライディングモード制御において重要なプロセスであり、システムが安定となるような切換超平面の設計が必要である。本研究では、切換超平面の設計として最適切換超平面の設計を用いた。はじめに、振子が平衡点近傍である状態のシステムの状態方程式、式(2)を次のように置き換える。

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (8)$$

$$B_p = [B_1^T \quad B_2^T]^T, \quad \det B_2 \neq 0 \quad (9)$$

また、正準系への座標変換行列によって式(8)を次のように変換する。

$$x_p = T^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T^{-1} z \quad (10)$$

$$z_1 \in R^{3 \times 1}, \quad z_2 \in R^{1 \times 1}$$

ここで、座標変換行列は次式である。

$$T = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0_{1 \times 3} & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

よって、式(8)は次のように変換される。

$$\dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} u \quad (12)$$

ただし、

$$\bar{A} = T A_p T^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = T B_p = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ B_2 \end{bmatrix}$$

である。また、切換関数は次のように設定する。

$$\sigma = S z = [S_1 \quad S_2] z \quad (13)$$

式(12)に対して、スライディングモード制御に移ってからの状態の変動を最小にする最適な切換超平面を求めるために、レギュレータ問題に帰着させた。そこで、次の評価関数を導入する。

$$J = \int_{t_s}^t z^T Q z dt \quad Q \in R^{4 \times 4} \quad (14)$$

ただし、重み関数 $Q$ は

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad Q_{12}^T = Q_{21}$$

という正定対称行列であり、 $t_s$ は状態 $z$ がスライディングモードを生じ始めたときの時刻である。また、式(14)は次のように展開できる。

$$J = \int_{t_s}^t (z_1^T Q_{11} z_1 + 2z_1^T Q_{12} z_2 + z_2^T Q_{22} z_2) dt \quad (15)$$

$$Q_{11} \in R^{3 \times 3}, \quad Q_{12} \in R^{3 \times 1}, \quad Q_{22} \in R^{1 \times 1}$$

ここで、補助変数

$$v = z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{12}^T z_1 \quad (16)$$

を導入すれば、式(15)の評価関数は次のような、各項が異なる変数をもった形となる。

$$J = \int_{t_s}^t (z_1^T \dot{Q}_{11} z_1 + v^T Q_{22} v) dt \quad (17)$$

$$\dot{Q}_{11} = Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T$$

このとき式(12)は、式(16)より $z_1$ に関する方程式

$$\dot{z}_1 = \bar{A}_{11} z_1 + \bar{A}_{12} v \quad (18)$$

となる。ただし、

$$\bar{A}_{11} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T$$

である。ここで、式(17)、(18)は最適制御問題の形をしており、最適な切換超平面の傾き $S$ を求める

ために式(17), (18)を解く。評価関数式(14)を最小とする解は、リカッチ方程式である

$$P\bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^T P - P\bar{A}_{12}Q_{22}^{-1}\bar{A}_{12}^T P + Q_{11} = 0 \quad (19)$$

の正定対称唯一解 $P$ を用いて

$$v = -Q_{22}^{-1}\bar{A}_{12}^T P z_1 \quad (20)$$

と与えられる。そして、式(16), 式(20)より

$$z_2 = -Q_{22}^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + Q_{12}^T) z_1 \quad (21)$$

と求められる。よって、切換関数は式(13)と設定しているため、式(21)の結果から

$$\begin{aligned} \sigma &= (\bar{A}_{12}^T P + Q_{12}^T) z_1 + Q_{22} z_2 \\ &= [\bar{A}_{12}^T P + Q_{12}^T \quad \vdots \quad Q_{22}] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= [S_1 \quad \vdots \quad S_2] z \end{aligned} \quad (22)$$

と書くことができ、切換超平面の傾き $S$ は

$$S = [\bar{A}_{12}^T P + Q_{12}^T \quad \vdots \quad Q_{22}] \quad (23)$$

と設計され、スライディングモードを生じさせると評価関数 $J$ を最小にする制御系を構成できる。

### 4.3.2 スライディングモードコントローラ的设计

次に、設計した切換超平面に状態量を漸近させ、拘束させる、つまり $\sigma = 0$ とするためのスライディングモードコントローラ的设计について述べる。今回はコントローラとして、最終スライディングモード制御を用いる。一般に最終スライディングモード制御入力 $u_l$ は、状態量を切換面に拘束する線形状態フィードバック制御項 $u_{nl}$ と、状態量を切換面に近づける非線形制御項 $u_{nl}$ の二つの独立項から構成され、

$$u = u_l + u_{nl} = -Fz - k(z,t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (24)$$

と仮定されている。ここで、

$$F = (S\bar{B})^{-1} S\bar{A} \quad (25)$$

とすると、 $u_l$ は等価制御入力 $u_{eq}$ となる。等価制御入力とは、本来は切換面上で不連続である制御入力を連続的な制御入力に変換したもので、以下に導出を示す。切換面上でスライディングモードを生じているとき、 $\sigma = 0$ ,  $\dot{\sigma} = 0$ であり、式(12), (13)より、

$$\dot{\sigma} = S\dot{z} = S\bar{A}z + S\bar{B}u = 0 \quad (26)$$

という式が成立する。この式から切換面に状態量を拘束する等価制御入力は次のように導出することが

でき、式(25)と対応していることがわかる。

$$u_{eq} = (S\bar{B})^{-1} S\bar{A}z \quad (27)$$

次に、 $k(z,t)$ を求めるために、式(24)の非線形制御項のみを考慮した単位制御入力を考える。つまり、

$$u = -k(z,t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (28)$$

とする。本研究では、 $k(z,t)$ の設計に対して、 $\sigma$ の候補にリアプノフ関数を利用した制御系の設計を行う。そこで、リアプノフ関数を

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (29)$$

とおき、時間微分を求めると次式となる。

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T S\bar{A}z + \sigma^T S\bar{B}u \quad (30)$$

仮定した制御入力である式(28)を代入すると、

$$\dot{V} = \sigma^T S\bar{A}z - k(z,t) \sigma^T S\bar{B} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (31)$$

が得られる。ここで、 $k(z,t)$ は設計パラメータ、 $\|\cdot\|$ はノルムである。式(31)は次のように展開できる<sup>2)</sup>。

$$\dot{V} = \sigma^T S\bar{A}z - k(z,t) \sigma^T S\bar{B} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (32)$$

$$\leq -\|\sigma\| [k(z,t)\|S\bar{B}\| - \|S\bar{A}\| \|z\|]$$

システムが安定となるための条件は $\dot{V} < 0$ であることから、 $k(z,t)$ は次のように設計できる。

$$k(z,t) \geq \|S\bar{B}\|^{-1} \|S\bar{A}\| \|z\| \quad (33)$$

最後に、式(24)に示した制御則による最終スライディングモードの存在条件を考える。式(24)を式(30)に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T S\bar{A}z + \sigma^T S\bar{B}z \\ &= \sigma^T \left\{ S\bar{A}z + S\bar{B} \left( - (S\bar{B})^{-1} S\bar{A}z - k(z,t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \right) \right\} \\ &= -k(z,t) S\bar{B} \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|} \end{aligned} \quad (34)$$

よって、式(24)の $k(z,t)$ の符号を $S\bar{B}$ の符号に合わせる、つまり、 $S\bar{B} > 0$ のときに、 $k(z,t) > 0$ 、 $S\bar{B} < 0$ のときに $k(z,t) < 0$ とすることで、 $\dot{V} < 0$ となり、時間経過と共に $\sigma \rightarrow 0$ となる。さらに、式(13)より、 $z \rightarrow 0$ 、式(10)より元の状態量 $x_p$ がゼロに収束する。

### 4.3.3 チャタリングの回避

制御則式(24)は、第2項が不連続な切換関数となっており、切換面近傍 ( $\sigma \approx 0$ ) において、チャタリングと呼ばれる高周波振動を生じてしまう。そこで、微小項  $\delta > 0$  を導入して関数を平滑化し、新たな制御則を次式とする。

$$u = (S\bar{B})^{-1} S\bar{A}z - k(z,t) \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \delta} \quad (35)$$

以上より、スライディングモード制御の設計は、

Step1 超平面の設計

Step2 コントローラの設計

Step3 チャタリングの回避

の3段階で設計され、設計パラメータである式(24)のパラメータ  $k(z,t)$  は式(34)より求められるが、無数の候補が算出されるため、本研究では、さらに式(33)を満たす  $k(z,t)$  を導出した。

## 5. シミュレーション結果

第4章で設計した制御則を検証するため、シミュレーションソフトにMATLAB/Simulinkを用いて、振り上げ安定化シミュレーションを行った。本システムにおいては常に、最終スライディングモードの存在条件、式(34)において  $S\bar{B} > 0$  が得られるため、 $k(z,t) > 0$  であれば最終スライディングモードが存在する。しかし、制御則の設計パラメータ  $k(z,t)$  の候補は無数にあるため、本シミュレーションでは

Case1:  $k(z,t) > 0$  を満たす

適当な任意の正の定数

Case2:  $k(z,t) > 0$  かつ式(33)を用いて

状態量から得られる正の変数

の場合の2通りを行った。

### I. Case1 のシミュレーション

ここでは、 $k(z,t)$  を任意の定数とするシミュレーションについて示す。重み関数  $Q$  を

$$Q = \text{diag.}[100 \quad 1 \quad 2000 \quad 1]$$

として、式(23)より切換超平面  $S$  を設計した結果、

$$S = [-10.0, \quad 101.9, \quad -45.04, \quad 1.0]$$

と得られた。さらに、リアプノフ関数である式(34)を常に負定関数とするために  $S\bar{B}$  を求めた結果、 $S\bar{B} = 23.4$  と求まり、 $S\bar{B} > 0$  であることを確認した。これより、制御入力 of 式(35)のパラメータ  $k(z,t)$  およびチャタリング防止のパラメータ  $\delta$  を

$$k(z,t) = 0.001, \quad \delta = 0.5$$

と設計し、また、振り上げ制御におけるエネルギー法を利用した制御入力の各設計パラメータは

$$\varepsilon = 0.2, \quad \gamma = 1.6$$

と設定した。なお、振り上げ制御から安定化制御への切り換えは、振子が真上から  $\pm 15[\text{deg}]$  の領域に進入するタイミングで行った。シミュレーション結果として、Fig. 5(a)~(e) にそれぞれ、アーム角度  $\theta$ 、振子角度  $\alpha$ 、アーム角速度  $\dot{\theta}$ 、振子角速度  $\dot{\alpha}$ 、そして、モータ入力電圧  $V$  の時間応答を示す。ここで、図中の  $4.5[\text{sec}]$  付近の線はスライディングモード制御への切り替え時刻を示している。Fig. 5(b)~(d) より、アーム角速度  $\dot{\theta}$ 、振子角速度  $\dot{\alpha}$  は  $0[\text{rad/s}]$  に、振子角度  $\alpha$  は  $-360[\text{deg}]$  に漸近して拘束されており、振子が倒立状態に漸近安定化されていることが確認できる。ここで、振子角度  $\alpha$  については、真上が  $\pm 2n \times 180$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) となるように設定している。また、Fig. 5(e) より、モータ入力電圧  $V$  も許容入力電圧  $\pm 25[\text{V}]$  以内である。しかし、Fig. 5(a)を見ると、アーム角度  $\theta$  のみがおよそ  $750[\text{deg}]$  付近で定常状態となっており、 $0[\text{deg}]$  に漸近しなかった。

### II. Case2 のシミュレーション

次に、 $k(z,t)$  を状態量の関数とするシミュレーションについて示す。前述したように  $S\bar{B} > 0$  であるから  $k(z,t) > 0$  となるように設計する。さらに、式(33)より  $k(z,t)$  を設計した結果、

$$k(z,t) = \|S\bar{B}\|^{-1} \|S\bar{A}\| \|z\| = 139 \|z\|$$

となり、 $k(z,t) > 0$  を確認した。他の設計パラメータは以下のように設計した。

$$Q = \text{diag.}[2 \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad \delta = 2.0$$

Case2 ではCase1と異なり、操作量にかかる重みを小さくするために重み関数を小さめに設計した。また、振り上げ制御におけるエネルギー法を用いた制御入力の各設計パラメータは以下のように設定した。

$$\varepsilon = 0.2, \quad \gamma = 1.5$$

なお、振り上げ制御から安定化制御への切り換えは、振子が真上から  $\pm 30[\text{deg}]$  の領域に進入したタイミングで行った。シミュレーション結果として、Fig. 6(a)~(e) にそれぞれ、アーム角度  $\theta$ 、振子角度  $\alpha$ 、アーム角速度  $\dot{\theta}$ 、振子角速度  $\dot{\alpha}$ 、そして、モータ入力電圧  $V$  の時間応答を示す。Fig. 6(a) より、

スライディングモード制御を用いた回転型倒立振子の振り上げ安定化制御

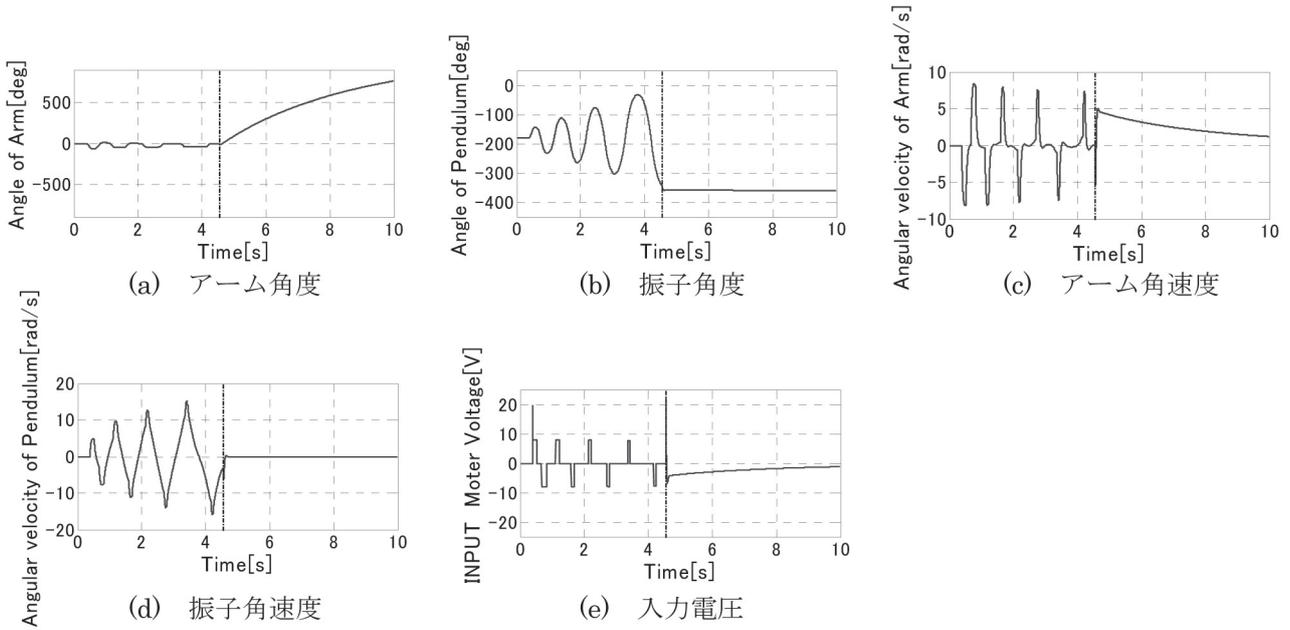


Fig. 5 Case1 のシミュレーション結果

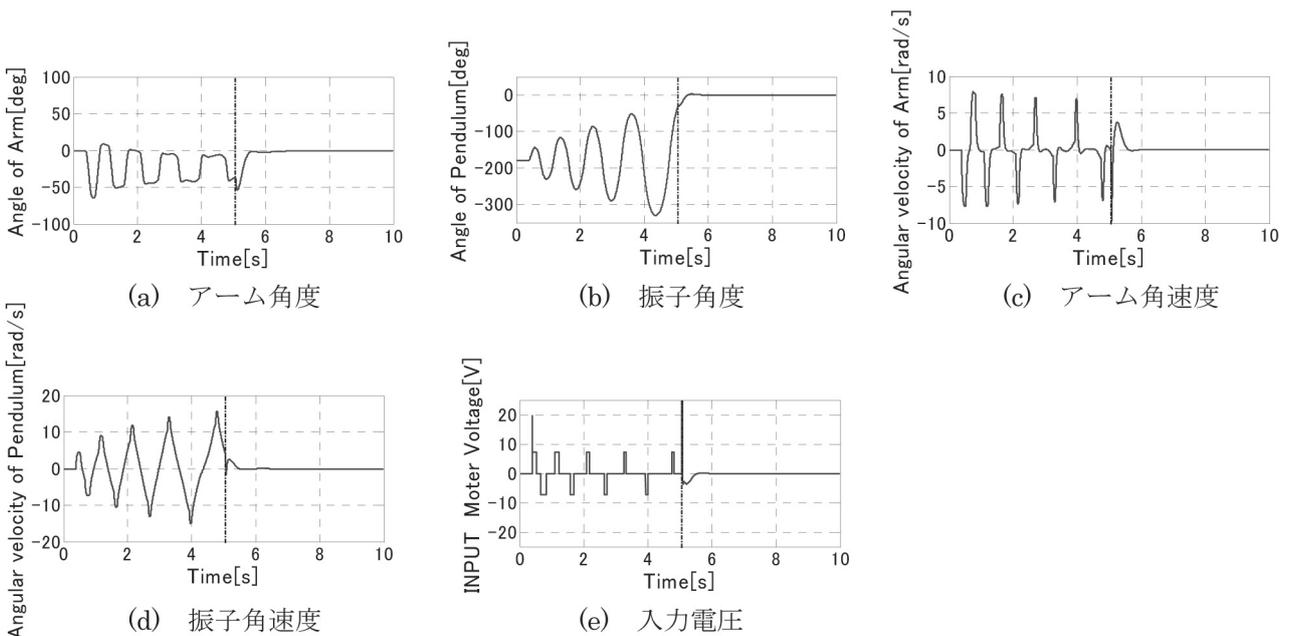


Fig. 6 Case2 のシミュレーション結果

Case1 では見られなかったアーム角度 $\theta$ の漸近が達成されており, Fig.6(b)~(e) を見ると, その他の状態量についてもアーム角度の漸近による変化は見られず, すべての状態量が定常状態に収束している。

6. 実験結果

第5章のシミュレーション結果と比較検討するため, 第4章で設計した制御則をMATLAB/Simulinkでプログラミングし, デジタルマルチコン

トローラ Multi Q-PCI を用いて実装して実験を行った。実験においてもシミュレーションと同様に,

Case1 :  $k(z,t) > 0$  を満たす

適当な任意の正の定数

Case2 :  $k(z,t) > 0$ かつ式(33) を用いて

状態量から得られる正の変数

の場合の2通りを行った。実装したプログラムは付録に示す。

**I. Case1 の実験**

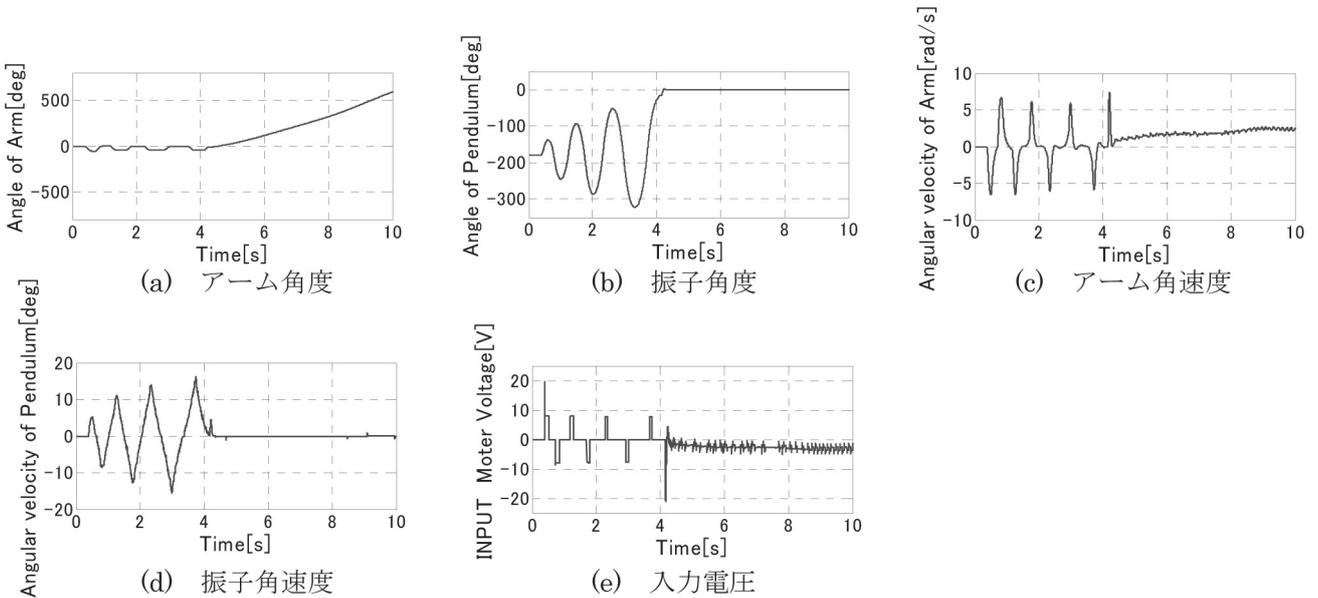
$k(z,t)$  を任意の定数とした実験を行った。シミュレーションと同様に、安定化制御におけるスライディングモード制御の各設計パラメータおよび振り上げ制御におけるエネルギー法を利用した制御入力の各設計パラメータを次のように設計した。

$$Q = \text{diag.}[100 \ 1 \ 2000 \ 1]$$

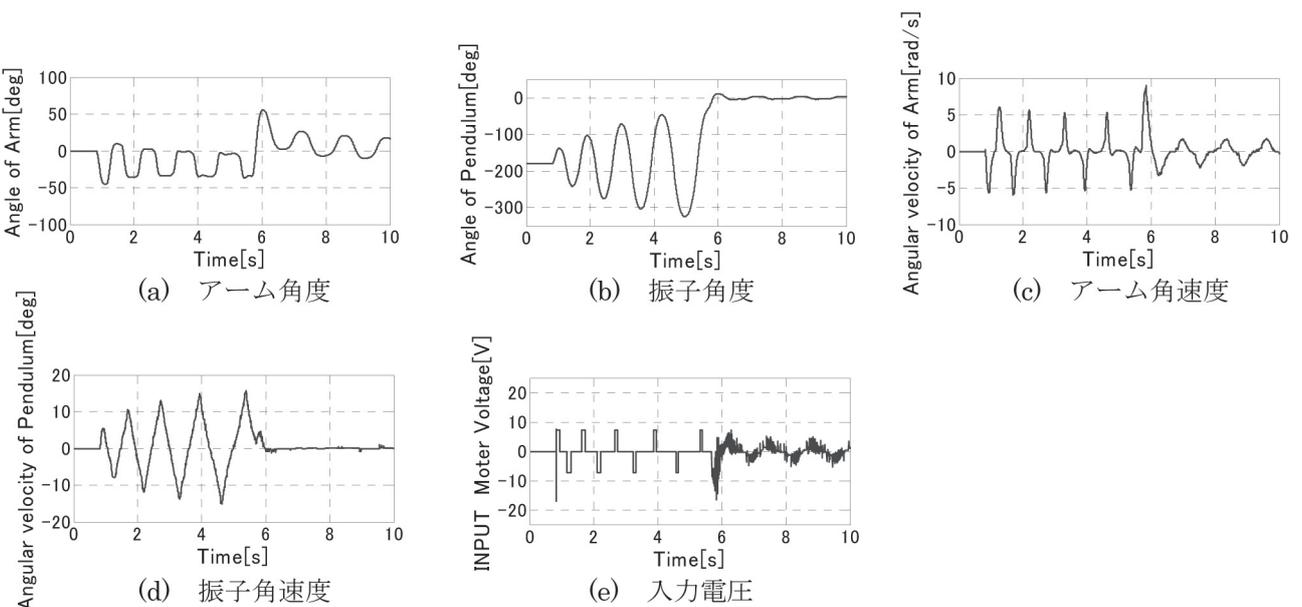
$$k(z,t) = 0.001, \quad \delta = 0.5, \quad \varepsilon = 0.2, \quad \gamma = 1.6$$

なお、振り上げ制御から安定化制御への切り換えは、振子が真上から  $\pm 15[\text{deg}]$  以内の領域に進入す

るタイミングで行った。実験結果を Fig. 7 に示す。Fig. 7(a)~(e) は、それぞれ、アーム角度  $\theta$ 、振り角度  $\alpha$ 、アーム角速度  $\dot{\theta}$ 、振り角速度  $\dot{\alpha}$ 、そして、モータ入力電圧  $V$  の時間応答である。Fig. 7(a)~(d) より、シミュレーションと同様に、振子は鉛直方向真上に倒立し、安定化が図られていることがわかる。しかし、アーム角速度  $\dot{\theta}$  は、シミュレーションでは Fig. 5(c) に示したように  $0[\text{rad/s}]$  に漸近しているが、実験では Fig. 7(c) に示すように  $0[\text{rad/s}]$  に漸近せず、アームが一定の速度で回転し続けていることがわかる。また、スライディングモード制御に



**Fig. 7 Case1 の実験結果**



**Fig. 8 Case2 の実験結果**

おける入力電圧を見ると、シミュレーションでは Fig. 5(e) に示したように平滑化されているが、実験では Fig. 7(e) に示すようにチャタリングが生じている。これより、式(35)におけるパラメータ  $\delta = 0.5$  では、実際にチャタリングを防止することはできないと分かった。

## II. Case2 の実験

次に、 $k(z,t)$  を状態量の関数として実験を行った。シミュレーションと同様に、安定化制御におけるスライディングモード制御の各設計パラメータおよび振り上げ制御におけるエネルギー法を利用した制御入力の各設計パラメータを次のように設計した。

$$Q = \text{diag.}[2 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$k(z,t) = \|S\bar{B}\|^{-1} \|S\bar{A}\| \|z\| = 139 \|z\|$$

$$\delta = 2.0, \quad \varepsilon = 0.2, \quad \gamma = 1.5$$

なお、振り上げ制御から安定化制御への切り換えは振子が真上から  $\pm 30[\text{deg}]$  以内の領域に進入するタイミングで行った。実験結果を Fig. 8 に示す。Fig. 8(a) ~ (e) は、それぞれ、アーム角度  $\theta$ 、振子角度  $\alpha$ 、アーム角速度  $\dot{\theta}$ 、振子角速度  $\dot{\alpha}$ 、モータ入力電圧  $V$  の時間応答である。Fig. 8(a) ~ (d) を見ると、振子の倒立状態での安定化はなされており、アームの角度  $\theta$ 、角速度  $\dot{\theta}$  も拘束されていることがわかる。しかし、アーム角度  $\theta$ 、アーム角速度  $\dot{\theta}$  はシミュレ-

ーションとは異なり、漸近が弱いことを確認した。また、Case1 と同様に、シミュレーションでは Fig. 6(e) に示したように平滑化されているが、実験では Fig. 8(e) に示すようにチャタリングが生じており、式(35)におけるパラメータ  $\delta = 2.0$  では実際にチャタリングを防止することができないと分かった。

## 7. 結言

スライディングモード制御法に基づく制御則において、先行研究では定数としたゲインを、本研究では状態量によって変化する関数として設計し、その制御則の有効性をシミュレーションおよび実機実験により検討した。その結果、先行研究での実験結果と同様に、振り上げ制御から安定化制御への遷移および安定化制御の安定性は十分であることを確認し、さらに、先行研究において達成できなかったアームの平衡状態への漸近、拘束も達成することができた。この結果より、システムの状態量をパラメータとしたゲインが、システム全体の平衡状態への漸近、拘束に対して有効であることを確認した。

今後は、実験結果である Fig. 7 (e) および Fig. 8 (e) において見られる、制御入力のチャタリングを防止するための最適なパラメータ設計を目指すと共に、アーム角度の偏差を状態量として加えたサーボ系を設計し、シミュレーションおよび実験を行い、今回の実験結果との比較検討を行う予定である。

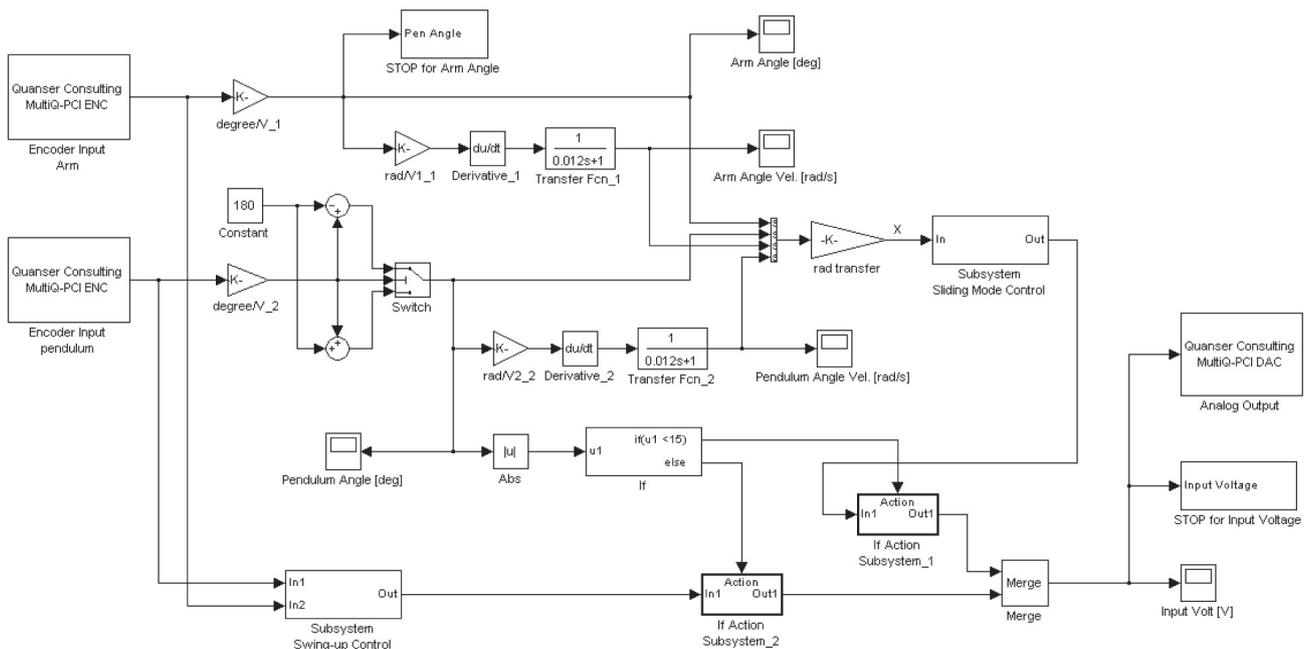


Fig. 9 ブロック線図

## 8. 参考文献

- 1) Spong, M, "The Swingup Control Problem for the Acrobot", IEEE control Systems Magazine, vol.15, No. 1, pp. 49-55, Feb. 1995.
- 2) 野波, 田, スライディングモード制御—非線形ロボバスト制御の設計理論—, コロナ社, 1994
- 3) 野波, 西村, 平田, MATLABによる制御系設計, 東京電機大学出版局, 1998
- 4) 奈良, 木澤, エネルギー法を利用した回転型倒立振子の振り上げ制御, 日本機械学会東北学生

会第37回卒業研究発表講演会講演論文集, pp. 189-190, 2007

- 5) 加賀, 木澤, スライディングモード制御法による回転型倒立振子の安定化, 秋田高専研究紀要, vol.44, pp. 51-57, 2009

### 付録 実装したプログラム

第6章で記述している実験概要の中で, 実験に際してMATLAB/Simulinkを用いて実装したプログラムをFig. 9に示す。