1階線形偏微分方程式の特性曲線法

～高専生のための教材の提案～

嶋　野　和　史

The method of characteristics for first-order linear partial differential equations ～The suggestion of the teaching materials for students of National College of Technology～

Kazufumi SHIMANO

（平成21年11月28日受理）

We consider the Cauchy problem for first-order linear partial differential equations. We solve this problem by the method of characteristics. This method is well-known in the study of partial differential equations. However, many students use Fourier's method to find a solution of partial differential equations. In this paper, we explain that it is easy to understand the method of characteristic for students.

KEYWORDS : Cauchy problem, first-order PDE, Fourier's method, method of characteristic

1　はじめに

本校では偏微分方程式について数学の講義で教わるのは４年の「応用解析II」においてである。そしてその内容もFourier解析の応用として，熱伝導方程式，波動方程式，Laplace方程式を変数分離法を用いて常微分方程式を解き，特解を重ね合わせた後に，初期条件が成り立つように解を構成する方法（Fourierの方法）が主で取り上げている。この方法は確かに重要であるのだが，初期条件，境界条件の与え方によっては用いることは困難である。また，教科書の演習問題では１階偏微分方程式をFourierの方法で解かせる問題がいくつかあるのだが，学生にとっては唐突に感じられ，苦手意識があるようである。

一階偏微分方程式については，著者も研究で関わりを持っているのだが，この研究分野においては通常解の求め方としてFourierの方法を用いることはめったにない。それは，線形偏微分方程式でも初期条件の与え方によっては通用しなくなるからである。一般に，よく用いられるのはLagrangeによる特性曲線法である。これは線形偏微分方程式だけではなく，非線形偏微分方程式についてもある程度効力を発揮し，常微分方程式の初期値問題の解法の知識だけで十分解けてしまうという大きな利点がある。しかしながら，高専数学ではほとんど紹介されていない解法である。そこで本論文では，特性曲線法を紹介し，いくつかの例を与え，基本的な計算だけで解が求まることを説明していく。

2　特性曲線法

線形偏微分方程式の初期値問題（Cauchy問題）

$$\begin{cases} u_t + a(t,x)\,u_x = b(t,x,u) \\ \qquad\qquad (t > 0,\ -\infty < x < \infty) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える。

まず，常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x' = a(t,x) \quad (t > 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

を解く。$a(t,x)$，$a_x(t,x)$ が連続関数であれば，(2.2)の解は一意に存在することが知られている。解が存

在することを示すだけならば，$a(t,x)$ が連続関数であるという条件だけで済む。しかしながら，爆発しないような解でただ一つしか存在しないことをいうためにはこの条件では不十分である。特性曲線法の鍵となる部分は，(2.1) の解の定義域である $t>0$, $-\infty<x<\infty$ という範囲を (2.2) の解が初期値 x_0 を変化させていくことで交わることなく覆いつくすことができるかどうかである。解の一意存在性があれば，(2.2) の解曲線群で (2.1) の解の定義域を覆いつくすことは可能となる。以下，(2.2) の解が一意存在する仮定のもとで述べていく。

(2.2) の解 $x(t)$ を用いて，

$$v(t)=u(t,x(t))$$

とおくと，$v(t)$ を微分すれば，合成関数の微分法と (2.1) より，

$$\begin{aligned} v'(t) &= u_t(t,x(t))+u_x(t,x(t))\cdot x'(t) \\ &= u_t(t,x(t))+a(t,x(t))\cdot u_x(t,x(t)) \\ &= b(t,x(t),u(t,x(t))) \\ &= b(t,x(t),v(t)) \end{aligned}$$

となる。また，

$$v(0)=u(0,x(0))=u(0,x_0)=f(x_0)$$

となる。ゆえに，$v(t)$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} v'(t)=b(t,x(t),v(t)) & (t>0) \\ v(0)=f(x_0) \end{cases} \tag{2.3}$$

を考えることになる。$b(t,x,u)$ は連続であれば解の存在が分かる。解が爆発せず，一意に存在するには，(2.2) の $a(t,x)$ と同様な滑らかさが必要になる。

$v(t)$ が求まれば，$u(t,x(t))=v(t)$ であるから，(2.2) の解の形と (2.3) の解の形に応じて，変数変換により，(2.1) の解を求めることができる。

特性曲線法は，(2.1) の偏微分方程式を各曲線ごとで解を求めることである。曲線上で偏微分方程式を考えると，実際は常微分方程式になり，偏微分方程式の解の性質は必要なくなる利点があり，計算法は非常に明解であるように思われる。

3　特性曲線法を用いた解法の紹介

ここでは，いくつかの問題を挙げ，具体的に特性曲線法を用いた解法を紹介する。

例 1

$$\begin{cases} u_t+2tu_x=0 & (t>0,\ -\infty<x<\infty) \\ u(0,x)=e^{-x}+e^{2x} \end{cases} \tag{3.1}$$

この問題はFourierの方法でも解けるが，特性曲線法を分かりやすく説明するために挙げておく。

まず，常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'=2t & (t>0) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

を解く。微分方程式の両辺を 0 から t まで積分すれば，

$$x(t)=x_0+t^2$$

となる。

$$v(t)=u(t,x_0+t^2)$$

とおけば，$v'(t)=0$, $v(0)=e^{-x_0}+e^{2x_0}$ となる。ゆえに，$v(t)=e^{-x_0}+e^{2x_0}$ である。つまり，

$$u(t,x_0+t^2)=e^{-x_0}+e^{2x_0} \tag{3.2}$$

である。$x=x_0+t^2$ より，$x_0=x-t^2$ であるから，(3.2) は

$$u(t,x)=e^{t^2-x}+e^{2(x-t^2)}$$

と書き換えられ，これが (3.1) の解になる。

次に，Fourierの方法で解いてみる。

$$u(t,x)=T(t)X(x)$$

で表されたとする。(3.1) の偏微分方程式に代入すると，

$$T'(t)X(x)+2tT(t)X'(x)=0$$

となり，両辺を $2tT(t)X(x)$ で割ると，

$$\frac{T'(t)}{2tT(t)}=-\frac{X'(x)}{X(x)}$$

となる。任意の t, x に対して，上の等式が成り立つので，両辺とも定数である。ここで，この定数を λ とおくと，

$$\begin{cases} T'(t)-2\lambda tT(t)=0 \\ X'(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

が得られる。両方とも 1 階線形常微分方程式であるあるので，容易に解け，

$$T(t)=C_1e^{\lambda t^2},\quad X(x)=C_2e^{-\lambda x}$$

(C_1, C_2：任意定数)

となる。重ね合わせの原理より，

$u(t,x) = A_1 e^{\lambda_1 (t^2 - x)} + A_2 e^{\lambda_2 (t^2 - x)}$
$(A_1, A_2, \lambda_1, \lambda_2$：定数）

は（3.1）の偏微分方程式の解である。初期条件を満たすには，$A_1 = A_2 = 1$，$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -2$ とすればよい。したがって，

$u(t,x) = e^{t^2 - x} + e^{2(x - t^2)}$

となり，特性曲線法で求めた解と同じになる。しかしながら，初期値の取り方によっては，変数分離形の解になるとは限らないことも分かり，Fourierの方法を用いることが不可能になる。

例 2

$$\begin{cases} u_t + 6tu_x = xu & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

この問題はFourierの方法で解くのは困難である。
常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x' = 6t & (t > 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

を解く。微分方程式の両辺を 0 から t まで積分すれば，

$x(t) = x_0 + 3t^2$

となる。

$v(t) = u(t, x_0 + 3t^2)$

とおけば，

$$\begin{cases} v'(t) = (x_0 + 3t^2) v(t) & (t > 0) \\ v(0) = f(x_0) \end{cases} \tag{3.4}$$

が得られる。これは，1 階線形常微分方程式の初期値問題であり，解くのは容易である。
（3.4）の微分方程式の両辺に，$e^{-(x_0 t + t^3)}$ を掛けると，

$(v(t) e^{-(x_0 t + t^3)})' = 0$

となり，両辺を 0 から t まで積分し，初期条件を用いれば，

$u(t, x_0 + 3t^2) = v(t) = f(x_0) e^{x_0 t + t^3}$

が得られる。$x = x_0 + 3t^2$ より，

$u(t,x) = f(x - 3t^2) e^{xt - 2t^3}$

となり，これが（3.3）の解である。

例 3

$$\begin{cases} u_t + xu_x = t + u & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x' = x & (t > 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

を解くと，$x(t) = x_0 e^t$ となる。

$v(t) = u(t, x_0 e^t)$

とおけば，

$$\begin{cases} v'(t) = t + v(t) & (t > 0) \\ v(0) = f(x_0) \end{cases} \tag{3.6}$$

が得られる。
（3.6）の微分方程式の両辺に e^{-t} を掛ければ，

$(v(t) e^{-t})' = te^{-t}$

両辺を 0 から t まで積分すれば，

$$\begin{aligned} v(t) e^{-t} - v(0) &= \int_0^t se^{-s} ds \\ &= \Big[-se^{-s}\Big]_0^t + \int_0^t e^{-s} ds \\ &= -te^{-t} + \Big[-e^{-s}\Big]_0^t = 1 - (t+1) e^{-t} \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} u(t, x_0 e^{-t}) &= v(t) \\ &= (f(x_0) + 1) e^t - t + 1 \end{aligned}$$

$x = x_0 e^t$ より，

$u(t, x) = (f(xe^{-t}) + 1) e^t - t - 1$

となり，これが（3.5）の解である。

4　まとめ

特性曲線法を知れば，前章で説明したように，1 階常微分方程式の解法の知識があれば十分解くことが可能であることが分かる。前章の 3 つの例の解は大域解と呼ばれ，有限時刻で爆発することはない解である。しかし，（2.1）の $b(t, x, u)$ の項に u^2 が入ると解は有限時刻で爆発してしまう。しかしながら，局所解として求めることは可能である。
何故，特性曲線法を高専生の教材として取り入れることを提案したいのかと言えば，第一に微分方程

式の初等解法だけで解を求めることができ，またその初等解法についてより深い理解を得ることができるからである。第二にここで取り上げた 1 階偏微分方程式は輸送方程式と呼ばれ，自然科学現象，特に流体力学でよく現れる方程式であり，工学研究にも応用されており，高専生に密接した数学の話題と言ってもよいからである。

本校では 3 年生が「基礎解析」の半期で常微分方程式の初等解法を習っているが，これがどのように応用に活かされているのかを教える時間が残念ながら少ない。そのため，4 年生の「応用解析II」でのFourierの方法による偏微分方程式の解法は非常に難しく感じてしまうようだ。特に，熱伝導方程式はFourier解析とは非常に密接した間柄であり，Fourierの方法による解の求め方は重要であることは否定はしない。しかしながら，偏微分方程式を講義で取り上げる以上，その方法に偏った教え方は少々問題があるように思う。いくつかの解法を紹介していくことで，学生の理解する術を増やすことは教育上大切なことではないだろうか。本論文はその出発点となれば幸いと考えている。

最後に，本論文を書くきっかけを下さった本校自然科学系吉井洋二教授に厚く御礼申し上げます。

参考文献

[1] 石原　繁・浅野重初，理工系の基礎微分積分増補版，裳華房，1997
[2] 入江昭二・垣田高夫，フーリエの方法，内田老鶴圃，1974
[3] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics Vol.19, AMS, 1998
[4] 笠原晧司，微分方程式の基礎，朝倉書店，1982
[5] 矢野健太郎・石原　繁，基礎解析学改訂版，裳華房，1993