テイラーの定理について

吉 井 洋 二

Taylor's Theorem

Yoji YOSHII

(2012年12月12日受理)

It is not so easy for students to understand Taylor's Theorem. Even if they follow the proof, it seems that the meaning of the theorem is still unclear for them. We suggest a desirable approach to obtain a Taylor polynomial approximation before proving Taylor's Theorem.

Keywords : differential, linear approximation, tangent line, Taylor polynomial, Taylor's theorem, Maclaurin's theorem, mean value theorem, Rolle's theorem, Lagrange remainder, Bernoulli remainder, extremal value, inflection point

1 はじめに

微分の意味を理解させることは，個々の関数を実際微分するより難しい。ただ，何度か説明すれば克服できると思う。ところが，1次近似，2次近似，そしてテイラーの定理となると，数学好きの学生にとっても理解するのは中々困難である。平均値の定理などと違って図で説明することが難しいので，平均値の定理が理解できた学生でも，テイラーの定理は敬遠しがちである。工学系の数学では，テイラーの定理より，テイラー展開，特に個々のマクローリン展開を覚えていれば事足りる場合が多い。従ってテイラーの定理を理解せずに通り過ぎるケースも多いのではないか。

たとえば現在本校で使っている教科書［1］では，導関数の1次近似を積分することで2次近似を得ている。この手法で帰納的にn次近似を得るのである。これは，いきなりテイラーの定理を証明する多くの本に較べれば，工夫がなされていると思う。ただ，誤差関数の記述が判りにくい，積分を習ってからでないと説明できない，等のデメリットがある。そこでもう少しn次近似の意味が自然にわかるような，そしていわゆる**テイラー多項式**

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

がどうして出現するのかを明快に説明できるアプローチを模索した。何故この形が現れるのか，何故この多項式はaの近くで$f(x)$ とほぼ同じと考えてよいのか等の説明である。もちろん手っ取り早くテイラーの定理を証明してまえば，この定理を使ってすべて説明できるわけだが，ここは敢えて回り道を勧めたい。簡単にその流れを書いておく。

まずC^{n+1}を，実数aの周りで（$n+1$）回微分可能で（$n+1$）次導関数が連続な関数全体とする[*1]。

$f(x)\in C^{n+1}$を，$x=a$の近くでn次多項式$p(x)$ に近似したい。そこで，誤差関数

$$\varepsilon(x):=f(x)-p(x)$$

に，条件

$$\varepsilon(a)=\varepsilon'(a)=\varepsilon''(a)=\cdots=\varepsilon^{(n)}(a)=0 \tag{1}$$

を課す。この条件は，$\varepsilon(x)$ が$x=a$の近くで“非常に0に近い”ということを唱っている。これは，「各導関数の瞬間変化率が0である」などの言葉を使ってある程度説明できる。さらにこの条件は

$$\varepsilon(x)=(x-a)^{n+1}g(x) \tag{2}$$

なる**連続関数**$g(x)$が存在することに同値であるこ

[*1] 正確には「aを含むある開区間で（$n+1$）回微分可能，そして（$n+1$）次導関数がその閉包で連続」のように言うべきだが，分かり易さを強調する場合，しかも最初の段階では，「aの周りに」という表現で十分と考えた．このあとも，厳密性を欠くような表現を敢えて使うことがある．

と（これを重解定理と呼ぼう）を示しておくと，$\varepsilon(x)$ が $x=a$ の近くで0に近いことがより視覚的にわかる。次に $p(x)$ がどんな多項式になるかを調べると，条件（1）は，$p(x)$ が n 次テイラー多項式であることに同値であることがわかる。これが流れである。

このあとテイラーの定理を証明するが，本稿の主眼はテイラーの定理の証明ではなく，それに行き着くアプローチである。注意して欲しいのは，テイラーの定理とは，最初から $f(x)$ とその n 次テイラー多項式との違いを記述した定理なので，上記条件（1）は不要である。実際，$f(x)$ が（$n+1$）回微分可能でさえあればテイラーの定理は成り立つ。（$f(x)^{(n+1)}$ の連続性も不要である。）

テイラーの定理の応用である「極値の判定法」についても考察した。特に極値でない場合を詳しくまとめてみた。また，補足として，2変数関数の1次近似（これさえわかれば2変数関数のテイラーの定理は簡単なので）についても考察した。最後の付録では，導関数が連続でない例について考察した。

2　重解定理

$\varepsilon(x)\in C^{n+1}$ のとき，前節の（1）と（2）が同値であること，即ち重解定理を示す。

証）(1)⇒(2)：

$$g(x):=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(x)}{(x-a)^{n+1}} & (x\neq a)\\[2ex] \dfrac{\varepsilon^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} & (x=a)\end{cases}\qquad (3)$$

とおくと $\varepsilon(x)=(x-a)^{n+1}g(x)$ となるので，あとは $g(x)$ の $x=a$ での連続性を示せばよい。これはロピタルの定理を（$n+1$）回使うと

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(x)}{(x-a)^{n+1}}=\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

となり，$\varepsilon^{(n+1)}(x)$ は連続なので，この極限は $\frac{\varepsilon^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$ となる。従って $g(x)$ は $x=a$ で連続である。（$x=a$ 以外では $g(x)$ の定義から連続である。）

(2)⇒(1)：

$\varepsilon(x)=(x-a)^{n+1}g(x)$ ならば，まず $\varepsilon(a)=0$ である。次に，$g(x)=\frac{\varepsilon(x)}{(x-a)^{n+1}}$ が $x=a$ で連続なので，ロピタルの定理より，

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon'(x)}{(n+1)(x-a)^{n}}$$

が存在する。ところがこれが存在するためには $\varepsilon'(a)=0$ でなければならない。同様に

$$\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon'(x)}{(n+1)(x-a)^{n}}=\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon''(x)}{(n+1)n(x-a)^{n-1}}$$

が存在することから，$\varepsilon''(a)=0$ でなければならない。この議論を繰り返せば，$\varepsilon^{(k)}(a)=0(k=3,4,\cdots,n-1)$ となり，最後は

$$\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon^{(n-1)}(x)}{(n+1)\cdots 3(x-a)^{2}}=\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon^{(n)}(x)}{(n+1)\cdots 2(x-a)}$$

が存在することから，$\varepsilon^{(n)}(a)=0$ を得る。　□

この定理は，多項式の世界の因数定理を拡張した重解定理を，さらに複数回微分可能な関数に拡張したと考えてよい。

注1　複素関数論では，（1）および $\varepsilon^{(n+1)}(a)\neq 0$ なる条件で，$x=a$ を（$n+1$）位の零点と呼ぶ。ここでも重解定理が存在するが，これは $f(x)$ が正則関数の場合であり，定義域を実数に制限したとしても，それは単に無限回微分可能な関数ではなく，もっと強い性質をもった関数，いわゆる解析的関数となる。従ってここで引用することはできない。この場合の証明は，正則関数がテイラー展開可能であることからほとんど自明である。このテイラー展開はコーシーの積分公式から導かれるもので，実数関数のテイラー展開のように，対応するテイラーの定理などは存在しない。また，この場合は上記 $g(x)$ も自動的に正則関数になることを注意しておく（たとえば［4］参照）。

3　*n* 次近似

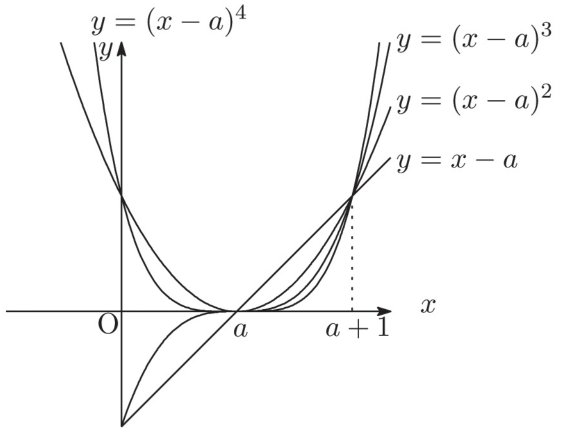
さて，$y=\varepsilon(x)$ における条件（1）の図形的意味はなんだろう？

これは条件（2）と同値であり，x が a に近ければ，$(x-a)^{n+1}$ は，n が大きいほど0に近い。従って $(x-a)^{n+1}g(x)=\varepsilon(x)$ も0に近いわけである。下のような図により，$\varepsilon(x)$ が0に近いことが視覚的にわかる。

従って，関数 $f(x)$ を，$x=a$ で一致する n 次多項式

$$f(a)+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots$$
$$\cdots+b_n(x-a)^n \qquad (4)$$

で近似しようとすれば[*2]，その誤差関数 $\varepsilon(x)$ に条件（1）を課すのは自然だろう。このとき以下が証



明できる。

近似定理　$f(x) \in C^{n+1}$に対して

$$f(x) = f(a) + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots \\ \cdots + b_n(x-a)^n + \varepsilon(x) \tag{5}$$

なる関数$\varepsilon(x)$ はC^{n+1}クラスである。

このとき条件（1）と条件

$$b_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \tag{6}$$

（$1 \leq i \leq n$）は同値である。

証）まず多項式（4）はC^{n+1}クラスより，$\varepsilon(x)$もC^{n+1}である。さて，

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x) &= b_i i! + b_{i+1}\frac{(i+1)!}{1!}(x-a) \\ &\quad + b_{i+2}\frac{(i+2)!}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad + b_n\frac{n!}{(n-i)!}(x-a)^{n-i} + \varepsilon^{(i)}(x) \end{aligned}$$

より，条件（1）と

$$f^{(i)}(a) = b_i i!$$

は同値となる。　□

もちろん（6）によりn次テイラー多項式

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が近似多項式となるわけである。

[*2] $x=a$で一致するn次多項式が必ず（4）の形で書けることは，その多項式を$x-a$で割り，さらにその商を次々に$x-a$で割っていくことでわかる．

注２　n次多項式$p(x)$ に対して，条件

$$f(a) = p(a),\ f'(a) = p'(a),\ \cdots,\ f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a)$$

は，$p(x)$ が$f(x)$ のn次テイラー多項式であることに同値である。また，２つのn次多項式$f(x)$ と$p(x)$ がこの条件を満たせば，$f(x) = p(x)$ となる。（n次多項式のn次テイラー多項式は自分自身である。）

テイラーの定理やテイラー展開に入る前に，この近似を体感させることは大切である。たとえば$\sqrt{1.1}$を，$\sqrt{x}$の$x=1$での２次近似で計算させ，電卓の値と比較させる。あるいは$y=\sqrt{x}$とその２次テイラー多項式のグラフ（放物線）を描かせ，$x=1$の近くで２つのグラフがほとんど同じになることを観察させる。このような作業が，n次近似の意味と有用性を理解させるのに最も有効と考える。

4　テイラーの定理

n次近似の誤差$\varepsilon(x)$ は，条件（2）より，$\varepsilon(x) = (x-a)^{n+1}g(x)$ と書けるわけだが，さらに$g(x)$ の定義（3）とn次近似式（5）より

$$g(a) = \frac{\varepsilon^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

もわかっている。**テイラーの定理**とは，

「aとxの間の数cを使って

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

と書ける」という主張である。

証[*3]）まずこれまでに分かった$f(x)$ のn次近似を書くと，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^{n+1}g(x)$$

となる。この等式のaをtに替えたtの関数$F(t)$ を考える。即ち，

$$F(t) := f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + (x-t)^{n+1}g(x)$$

とおく。すると$F(t)$ はtに関して微分可能であり，

$F(x)=F(a)=F(x)$ を満たす。従ってロルの定理より $F'(c)=0$ となる c が x と a の間に存在する。

さて，$F'(t)$ を計算すると，ほとんどの項が消えてしまい，結局

$$F'(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-(n+1)(x-t)^n g(x)$$

となる。ここで $F'(c)=0$ より，

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n=(n+1)(x-c)^n g(x)$$

となり，

$$g(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

となって証明が終わる。　□

注３　(i) 冒頭でも述べたように，テイラーの定理は最初からテイラー多項式との違いを調べるものなので，条件 (1) は不要である。従って，誤差関数を単に $\varepsilon(x)$ として初めても，$f(x)$ が $(n+1)$ 回微分可能であれば $\varepsilon(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ を得る。実際，$x\neq a$ なので $\varepsilon(x)=(x-a)^{n+1}g(x)$ と置いてよい。従って上と同じように導けばよい。従って $f^{(n+1)}(x)$ が連続でなくてもテイラーの定理は成り立つ。ただ，$f^{(n+1)}(x)$ が連続でない場合は，n 次近似と言わない方が賢明である。(x が a に近づくほど誤差関数 $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ が小さいとは言えなくなる[*4]。付録参照)

(ii) テイラーの定理の $n=0$ のとき，即ち，

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$$

は平均値の定理に他ならない。従って，テイラーの定理は平均値の定理の拡張と言える。

(iii) 上記誤差関数は**ラグランジュの剰余項**と呼ばれるものである。テイラー多項式による近似の誤差関数として，他にもいくつかある。特に積分を使った**ベルヌーイの剰余項**

$$\varepsilon(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \tag{7}$$

は有名である。実は歴史的にはこれが最も古く，テイラーの定理の最初の発見者はベルヌーイと言われている [2]。これは部分積分を繰り返すだけでよいので，近似などをあまり気にしないなら，この方法がベストかも知れない。その簡明さは以下の式を見れば明らかである。

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt=-\int_a^x f'(t)(x-t)'dt$$

$$=-\left[f'(t)(x-t)\right]_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)dt$$

$$=f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)dt$$

(x を定数とみて，$1=(t-x)'=(-(x-t))'$ としたところが素晴らしい！) そして積分の項をまた部分積分して

$$\int_a^x f''(t)(x-t)dt=-\int_a^x f''(t)\left(\frac{(x-t)^2}{2}\right)'dt$$

$$=\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt$$

となる。これを続けていけば n 回目に n 次テイラー多項式 + (7) の形になることは容易にわかる。(正式には帰納法で証明すればよい。)

5　極値の判定

テイラーの定理の応用として，極値の判定法がある。多くの本では $f'(a)=0$ で $f''(a)>0$ なら極小，$f''(a)<0$ なら極大であることが述べられている。また，この事実を一般化して，下のように偶数回微分と奇数回微分にまとめた本も多い (たとえば [1] の練習問題B)。しかしながら，変曲点の種類まで記述した本が見当たらないので，ここでまとめておくことにする。

まず，変曲点の種類を図で整理しておく (次頁)。

極値と変曲点の判定法　$f(x)\in C^n$ とし，

$$f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$$

かつ $f^{(n)}(a)\neq 0$ とする $(n\geqq 2)$。このとき，

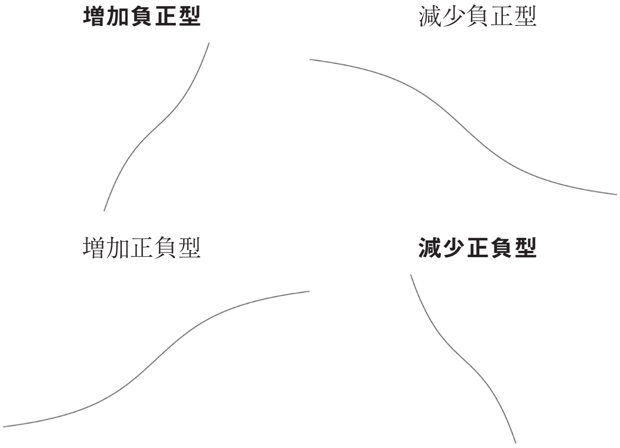
(i) n が偶数なら $f(x)$ は $x=a$ で極値をとり，$f^{(n)}(a)>0$ なら極小，$f^{(n)}(a)<0$ なら極大となる。

(ii) n が奇数なら $f(x)$ は $x=a$ で変曲点となり，

---

*3　この証明はどの本にも載っているので省略すべきかも知れないが，これまでの流れで無理なく証明できることを見て欲しい．ここでの証明は [3] を参考にしたが，コーシーの平均値の定理を使う方法も有名である (たとえば [5] 参照)．

*4　導関数は，「連続でなくても中間値の定理は成り立つ」という定理 ([5，第２章定理24参照]) もあるが，ここでは役立たない．



$f^{(n)}(a)>0$ なら増加負正型の変曲点，$f^{(n)}(a)<0$ なら減少正負型の変曲点となる。

証）テイラーの定理を適用（n次ではなく（$n-1$）次テイラー多項式で近似）すると，剰余項だけが残って

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

となる。まず，$f^{(n)}(x)$は連続[*5]なので，xがaに十分近ければ，「$f^{(n)}(c)$と$f^{(n)}(a)$の符号は一致する。」

従ってnが偶数なら（$x-a$)^{n}も正より，$f(x)-f(a)$の符号は，$f^{(n)}(a)$ の符号と一致する。よって（i）はよい。

nが奇数なら（$x-a$)^{n}は$x=a$で負から正に変わる。よって$f^{(n)}(a)$ が正なら$f(x)$ は$x=a$の近くで増加関数，負なら減少関数となる。さらに，$f''(x)$にテイラーの定理を適用すると，$f''(x)=0$ なので

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} \tag{8}$$

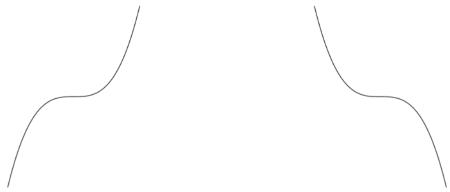
となる。よって，$(x-a)^{n-2}$が負から正に変わるので，$f''(x)$ の符号は変わる。即ち$x=a$で変曲点となる。そして$f^{(n)}(a)$ が正なら$f''(x)$ の符号はそのまま負から正，$f^{(n)}(a)$ が負なら正から負となる。 □

注 4 （i）極値の場合は，さらに細かい記述は不要と思われるが，一応，nが偶数の場合も（8）が成り立つ。従って，

- 極小の場合は$f''(a)=0$だが，$x=a$の近くでは$f''(x)>0$
- 極大の場合は$f''(a)=0$だが，$x=a$の近くでは$f''(x)<0$

を満たしている。これにより，通常の「下に凸」,「上に凸」という言葉も使ってよいことになる。

（ii）この判定法に現れる上記２種類の変曲点は，$f'(a)=0$より，$x=a$での接線は水平となるから，下のように描くべきである。また，減少負正型と増加正負型が$f'(a)=0$になり得ないことは，図からも明らかであろう。



6　おわりに

テイラーの定理が学生に分かりづらい原因の一つとして，記号の乱用があると思う。たとえば上記誤差関数$\varepsilon(x)$ をランダウの記号oを使って説明することがある。もちろんこれには利点があり，慣れてきたら使うべきだが，初めて習う学生には，できるだけ新しい概念を避けて説明したい。

注 5　上記n次近似の誤差関数$\varepsilon(x)$ に関してよく使われる条件

$$\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(x)}{(x-a)^n}=0 \tag{9}$$

（ラウダウ記号を用いるとき使う条件と言ってもよい）は，条件（1）に（従って（2）にも）同値であることを注意しておく。

証）(2)⇒(9) は明白である。(9)⇒(1) は，(2)⇒(1) の証明と同様にロピタルの定理を繰り返せばよい。故に (1)⇔(2)⇔(9) となる。

学生にとって，条件（2）の方が，条件（9）より分かり易いのは明らかであろう。但し，1 次近似の場合，即ち

$$\lim_{x\to a}\frac{\varepsilon(x)}{x-a}=0 \tag{10}$$

は，2 変数関数の 1 次近似へ自然に拡張できるので，この表現でも$\varepsilon(x)$ が$x=a$の近くで 0 に近いことを納得しておくことは大切である（補足参照）。

補足　2 変数関数$z=f(x,y)$ に関するテイラーの

[*5] 極値の判定では$f^{(n)}(x)$ の連続性を仮定しておく必要がある.

定理は，合成関数の微分法を使うことで，1変数のテイラーの定理から導ける。従って，1変数のテイラーの定理を理解しておけば，2変数は大丈夫と言いたい。ところが，合成関数の微分法を証明しようとすれば，そこに2変数関数の1次近似の概念（全微分可能性と言ってもよい）が必要になる。2変数関数の場合は，因数定理がないので1変数関数のような記述ができなくなる。具体的に述べると，それは $(x, y) = (a, b)$ での1次近似の誤差関数

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y) &= f(x, y) \\ &\quad - f(a, b) - f_x(a, b)(x-a) - f_y(a, b)(y-b) \quad (11)\end{aligned}$$

の扱いである。これが0に近いということを

$$\varepsilon(a, b) = \varepsilon_x(a, b) = \varepsilon_y(a, b) = 0$$

で説明してもよいが，1変数のときのように，誤差関数の易しい表現 $\varepsilon(x) = (x-a)^2 g(x)$ が欲しいところだ。しかし2変数になるともはやそう簡単にはいかない。実際，f_x も f_y も連続であると仮定しておけば，

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} \frac{\varepsilon(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \qquad (12)$$

を満たすこと（即ち $z = f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で全微分可能）が証明できる。だがこれが限界のようである。（もっと分かり易い表現はないようである）。辛うじてこれは，(10) の自然な拡張と考えることができる。解釈として，$\varepsilon(x, y)$ は点 (a, b) の近くで，「点 (a, b) から点 (x, y) までの**距離**より限りなく小さい」あるいは「点 (a, b) からどの方向の垂直な平面で切っても，その切り口にできる曲線の1次近似になっている」などがある。ただ，このような曖昧な言葉では納得しない学生もいる。そこで，後者の表現を具体的に式を使って説明しておく。

直線

$$(x, y) = (a, b) + t(\cos\theta, \sin\theta)$$

（t をパラメータとする θ 方向の直線）を使うと，この直線上で曲線 $z = f(x(t), y(t))$ ができる。これを単に (11) に代入すれば，

$$\begin{aligned}\varepsilon(x(t), y(t)) &= f(x(t), y(t)) \\ &\quad - f(a, b) - tf_x(a, b)\cos\theta - tf_y(a, b)\sin\theta\end{aligned}$$

となるわけだが，

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = |t|$$

となるから，(12) より

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varepsilon(x(t), y(t))}{|t|} = 0$$

を得る。従って，

$$f(a, b) + tf_x(a, b)\cos\theta + tf_y(a, b)\sin\theta$$

は曲線 $z = f(x(t), y(t))$ の $t = 0$ での1次近似であり，

$$z = f(a, b) + t\,(f_x(a, b)\cos\theta + f_y(a, b)\sin\theta)$$

は $t = 0$，即ち点 $(a, b, f(a, b))$ での接線と結論づけてよい。さらに詳しく述べると，これは，点 (a, b) を原点として，$t(\cos\theta, \sin\theta)$ を t 軸とする tz 平面に入る平面曲線 $z = f(x(t), y(t))$ の，$t = 0$ における接線である（傾きである t の係数は θ 方向への方向微分係数に他ならない）。

これが任意の θ で成り立つので，

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) \qquad (13)$$

はよい近似であり，この平面が $(x, y) = (a, b)$ での接平面になることを納得させるわけである。（もちろん現代数学においては，図などは補助説明でしかなく，「(12) が成り立つとき (13) を $(x, y) = (a, b)$ での接平面と呼ぶ」だけのことではあるが。）

付録　$f(x)$ が微分可能でその導関数 $f'(x)$ が連続でない例として，

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

を考える。実際，

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x^2} = 0$$

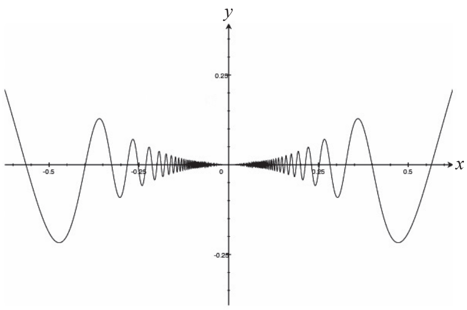
より $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$ であり，$x \neq 0$ では

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos\frac{1}{x^2}$$

となる。よって $f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではない（$x = 0$ の近くで激しく振動している）。平均値の定理を $x = 0$ において使えば，

$$f(x)=f(0)+f'(c)(x-0)=f'(c)x$$

となる。ここでxがどんなに0に近くても，$f'(c)$が非常に大きくになったり，小さくなったりするので，誤差関数$f'(c)x$が0に近づくとは言えない。従って，定数関数$y=0$が$x=0$の近くで$y=f(x)$を近似しているとは言い難い。$y=f(x)$ をgrapherで描くと（下図），遠目には原点近くで直線$y=0$に見えるが，拡大していけば，原点近くで振動していることがわかる。



謝辞　ここに述べた多くは，物質工学科5年，佐藤勇太君と，テイラーの定理について何度も議論した結果生まれたものである。ここに感謝の意を表する。

参考文献

[1] 新井一道　他，微分積分学II，大日本図書，2010.
[2] E. Hairer, G. Wanner, Analysis by its history, Springer, UTM, 2007.
[3] 竹縄知之，コア・テキスト微分積分，サイエンス社，2009.
[4] 渡部隆一　他，複素関数，培風館，1982.
[5] 高木貞治，解析概論，岩波書店（改訂第3版），2010.