

ベクトル場の演算（加算と減算）

生産システム工学専攻*1年 電気磁気学特論
2015年4月14日(火)

概要

電磁気学は、その名のとおり電気と磁気の性質を理解する学問である。そして、電気と磁気をベクトル解析という数学を道具に表現する。従って、ベクトル解析を十分に理解する必要がある。まず5回の講義を用いてベクトル解析の復習を行う。特に、多くの問題を解いて演算になれ、イメージを掴むことに力を注ぐ。

1 ベクトルの基本

1.1 ベクトルとは

長さや面積、あるいは質量、温度、時間、エネルギーなどは、大きさだけを持っている量である。これらの量は単位を決めれば、それらの何倍かという数値だけで完全に表現できる。これらの量をスカラー量と呼ぶ。

それに対して、変位や速度、加速度、力、運動量などは大きさだけでは表すことができない。大きさに加えて、その方向を示して、はじめて完全に表現できる。このように大きさと方向を持つ量をベクトル量という。位置ベクトルというものも、原点を決めてそこからの変位を表している。位置を表す量もベクトルである。

ベクトル量は便宜的に、1本の矢で表すことができる。矢の長さがその大きさを示し、先端の向きで方向を表す。例えば、図1の $\mathbf{A}$ のようにである。ベクトルの大きさは $|\mathbf{A}|$ と表現して、図では矢の長さで示す。通常絶対値と言うものは、原点からの距離を示す(複素数の場合でも)ので、ここで同じ記号が用いられるのももつともである。当然、これはスカラー量である。ベクトルをその大きさに割った量は、ベクトルで $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ と表現され、これは大きさが1の単位ベクトルとなる。単位ベクトルの大きさが1になることは、各自確かめよ。また、大きさがゼロのベクトルも存在して、それはゼロベクトルと呼ばれ $\mathbf{0}$ と書かれる。

一般にベクトル量は $\mathbf{A}$ のようにボールド書体で、スカラー量は A のようにノーマル書体で書かれる。今後、この授業ではこのように表現する。

*独立行政法人 国立高等専門学校機構 秋田工業高等専門学校 専攻科

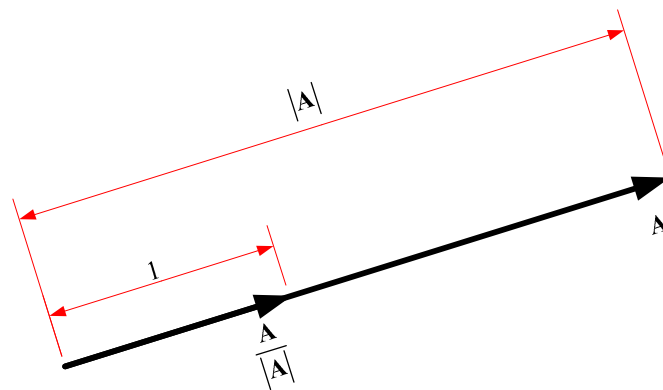


図 1: 矢で表現したベクトル

2 ベクトルの加算

ベクトルの加算は単純で、2つの矢をつなぎ合わせれば良い。たとえば、

$$C = A + B \quad (1)$$

の場合、図2のようになる。同様に、 $B + A$ も計算でき、図3に示すように $A + B$ と等しいことが分かる。

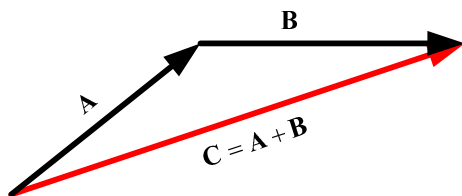


図 2: $C = A + B$

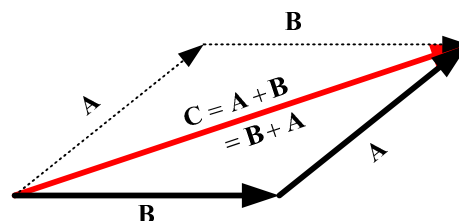


図 3: $C = B + A$

3 ベクトルとスカラーの乗算

スカラー量が正の場合は、方向を変えないでベクトルの大きさ (これはスカラー) をそのスカラー量倍すればよい (図4)。もし、かけるスカラー量が負の場合は、ベクトルの方向が逆になる。これは、ベクトルを-1倍すると、その方向が逆になることを示している (図5)。ちょうど普通の数 (スカラー) を-1倍すると、原点を中心に数直線上で逆になるのと同じである。

ベクトルの-1倍が決められたので、ベクトルの引き算の演算も可能となる。たとえば、

$$C = A - B \quad (2)$$

は、ベクトル A とベクトル $-B$ の加算と考えるのである。これは、図2のようになる。

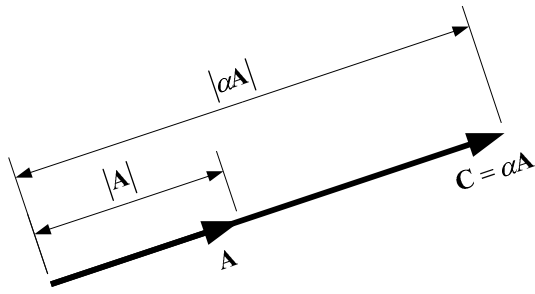


図 4: $C = \alpha A$

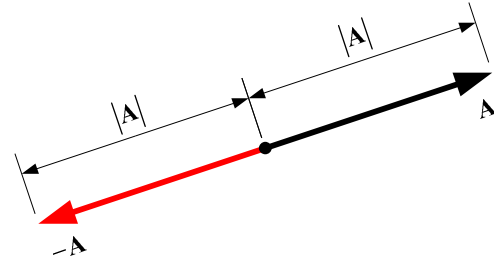


図 5: $C = -A$

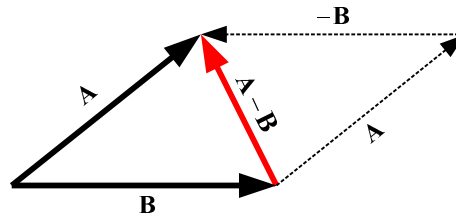


図 6: $C = A - B$

4 演算のためのベクトルの表現方法

4.1 位置ベクトル

これまでの話で、ベクトルは矢で表されることが分かった。矢で表すと直感的に分かり易いが、演算においては極めて使いづらい。そこで、演算に便利なベクトルの表現方法がある。図7のようにその矢の始まりを直交座標系の原点において、先端の座標で表すことができる。そうすると、ベクトル $\mathbf{r}$ は、

$$\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1) \quad (3)$$

のように成分を用いて表現することができる。この x_1, y_2, z_3 は、ベクトル $\mathbf{r}$ の成分と呼ばれ、ベクトル $\mathbf{r}$ を位置ベクトルという。我々は3次元の世界に住んでいるので、物理学で取り扱うベクトル量は3つの成分からなる。

この表現方法を用いてベクトルの加算を行うと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ &= (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) \end{aligned} \quad (4)$$

$$= (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \quad (5)$$

4.2 単位ベクトルとベクトルの大きさ

次に、更に一般的なベクトルの表現方法を示すことにする。座標の各軸の方向を向いた単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を導入すると、ベクトル $\mathbf{A}$ は図8のようになり、単位ベクトルの何倍

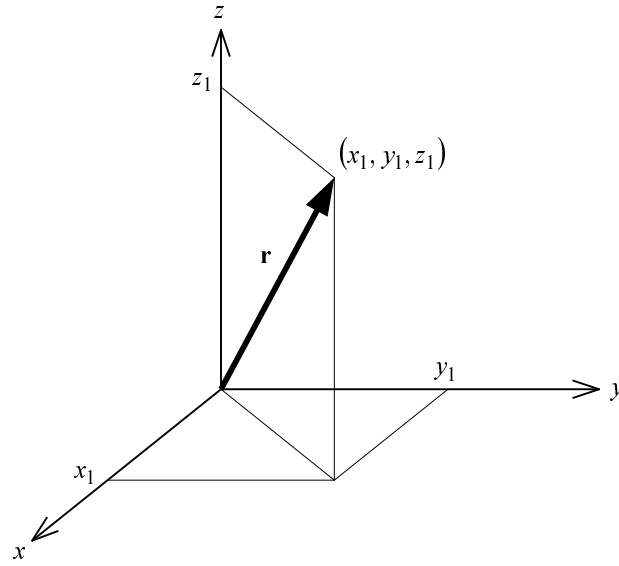


図 7: 成分によるベクトルの表現

という量で表すことができる．式にすると

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = (A_x, A_y, A_z) \quad (6)$$

である．ここで，単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の大きさは，1 である．ベクトルの成分を使った表現 (A_x, A_y, A_z) を，ベクトル $\mathbf{A}$ の成分表示と呼ぶ．

このようにすると，ベクトルの加算は成分同士の加算となり，計算が格段に簡単になる．また，ベクトルの大きさはピタゴラスの定理より

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (7)$$

となる．

4.3 方向余弦について

後に，方向余弦と言う話も出てくるので，少し説明をしておく．図 7 に示したように成分を使って，ベクトルは表現可能である．ベクトルの大きさを r として，各軸との角度をそれぞれ図 9 のようにすると，

$$r_x = r \cos \alpha \qquad r_y = r \cos \beta \qquad r_z = r \cos \gamma \quad (8)$$

の関係がある．ここで， r はベクトル $\mathbf{r}$ の大きさを表す．これらの $r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma$ を方向余弦と言う．

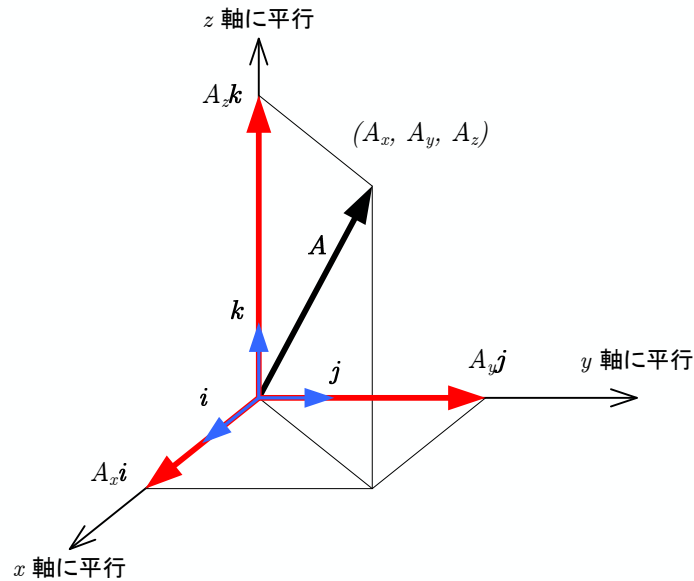


図 8: 単位ベクトル

5 座標の回転とベクトル

先に示したように、ベクトルは成分で表すことができる。3次元空間であれば、 x 軸と y 軸、そして z 軸に平行な成分のようにである。最初に述べたように、空間には特別な軸(原点)というものはない。従って、ベクトルで表される自然現象は軸の選び方によって、変化してはならない。そのためには、軸を変えた場合、それに応じてベクトルの成分が変わる必要がある。

あるベクトルの成分が、軸を変えるとどうなるか考える。軸を変えるということは、

- 軸の平行移動
- 軸の回転

の2つが考えられる。軸の平行移動の場合、ベクトルの成分が変わらないのはイメージしやすい。

一方、座標の回転に対してベクトルの成分の振る舞いは、座標変換を考えればよい。3次元の計算と図示は大変なので、2次元で考えることにする。例えば、図10のような変位ベクトルを考える。成分は、当然座標軸への射影であることを忘れてはならない。 $x-y$ 座標から $x'-y'$ 座標へ回転させる。座標軸を回転させても、ベクトルは変化しない。図の矢が変わっていないので、そうである。ただし、ベクトルの成分は変化する。この成分の変化は、

$$\begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

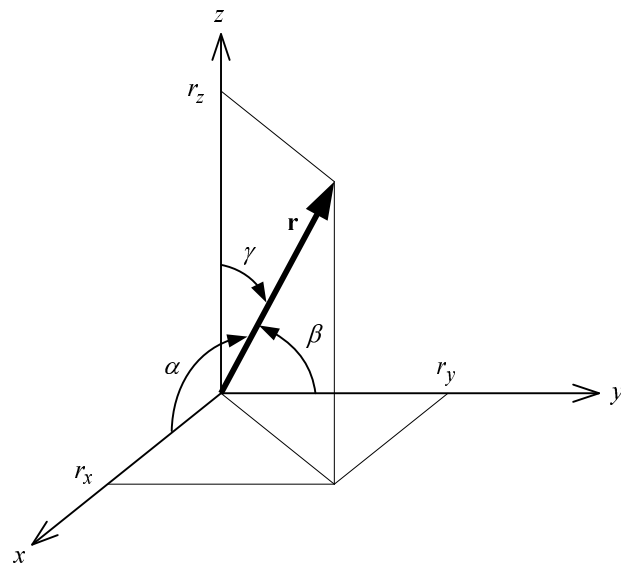


図 9: 方向余弦

と変換される．座標の回転に対して，ベクトルの成分はこの式と同じように変換されなくてはならない．ベクトルの成分は，座標系の回転ではその一つの点の座標と同じ変換となるのである．これを，新たなベクトルを定義して用いることにする．

これは，一つの物理的な法則がベクトルの方程式で表せたとすると，その式の関係は座標系を回転させても変わらないことを意味している．

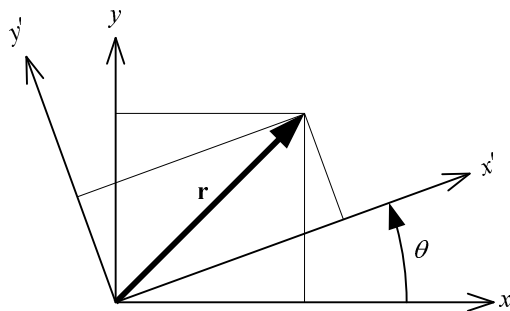


図 10: 座標の回転

6 問題

[問 1] 2つのベクトル

$$\mathbf{A} = (1, 2, 3)$$

$$\mathbf{B} = (3, 2, 1)$$

の $A + B$ と $A - B$ を計算しなさい。また、 A と B の大きさも計算しなさい。

[問 2] 2 つの位置ベクトル $A = \overrightarrow{OA}$, $B = \overrightarrow{OB}$ の終点 A と B の間を $m : n$ の比に分ける点 P の位置ベクトルを $X = \overrightarrow{OP}$ とすれば,

$$X = \frac{nA + mB}{m + n}$$

であることを示しなさい。

[問 3] 三角形 ABC の重心を G とし、点 A, B, C, G の位置ベクトルをそれぞれ、 $A = \overrightarrow{OA}$, $B = \overrightarrow{OB}$, $C = \overrightarrow{OC}$, $G = \overrightarrow{OG}$ とすれば,

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

であることを示しなさい。

7 次回演習問題

[問 1] スカラー積の演算を利用して、余弦定理を導きなさい。ヒント：図 11.

[問 2] ベクトル積の演算を利用して、正弦定理を導きなさい。ヒント：図 11.

[問 3] xy 平面上の 3 点 $(1, 2), (5, 8), (4, -3)$ を頂点とする三角形の面積を求めなさい。

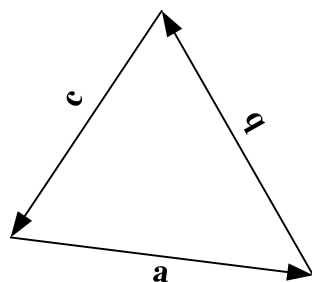


図 11: 三角形をベクトルで表す。

参考文献

[1] 関根 松夫, 佐野 元昭, “電磁気学を学ぶためのベクトル解析” コロナ社