

静磁場

(ビオ・サバールの法則とローレンツ力)

生産システム工学専攻* 電気磁気学特論
2015年6月30日(火)

概要

前回の講義では、電流が磁場を生じさせるビオ-サバールの法則を紹介し、静磁場を表す微分方程式（ガウスの法則とアンペールの法則）を示した。しかし、ビオ-サバールの法則は、微小電流と磁場の関係性を示す法則であり、実際の現象を考えると、電流保存の法則が成立せず物理的イメージは不可能である。ここでは、教科書の内容に沿って、このビオ-サバールの法則の導出を試み、電流に働く力（アンペールの力）を紹介する。

1 ビオ-サバールの法則

1.1 クーロンの法則とビオ-サバールの法則

ビオ-サバールの法則の導出の前に、静電場の最初に登場したクーロンの法則と、静磁場のビオ-サバールの法則を比較してみよう。

静電場の場合、微小体積が作る微小電場は、

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad (1)$$

となった。これに対応する静磁場の式がビオ-サバールの法則である。電流 $\mathbf{I}$ が流れている微小区間が作る微小磁場 (磁束密度) は、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad (2)$$

図1と図2に考えている体系を示す。このようにクーロンの法則とビオ・サバールの法則が等価であることがわかる。

*秋田工業高等専門学校専攻科

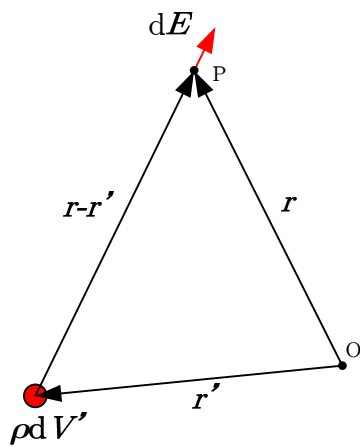


図 1: クーロンの法則.

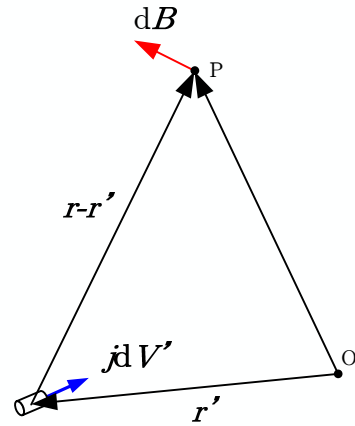


図 2: ビオ-サバールの法則.

1.2 ビオ-サバールの法則の導出

式 (1) のクーロンの法則は物理的なイメージを思い浮かべることができる。それに対して、ビオ-サバールの法則が述べているような物理的な状態—図 2—は電流が途中で途切れており、電流の定義に反する。ところが、ビオ-サバールの法則の積分形は物理的にありえる。式 (2) の積分形

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (3)$$

は常に静磁場では正しい。全ての領域にわたって電流密度を積分すれば、磁場が求まる。

では、実験的に得られたこのビオ-サバールの法則は、理論的にどのように導き出されるのだろうか？教科書の説明はきわめて簡潔な説明がなされているので、教科書に沿ってビオ-サバールの法則を導出してみよう。

電流が保存された系で微少電流を考えるために、教科書では、微少電線の両端で発散と収束を考えている。このようにする限り、電流は保存され、積分型のアンペールの法則が成立する。両端での等方的な電流の発散と収束は、全方向に積分するとゼロであるため、磁場を作らないのである。つまり、電流保存は成立し、かつ発散と収束の領域では電流は磁場を作らない場合を考えているのである。

これを表しているのが図 3 である。これについて、アンペールの法則を適用して、ビオ-サバールの法則を導いてみよう。

教科書の図 5.9(a) に示している磁場 $\Delta \mathbf{B}$ を求める。そのために、積分形のアンペールの法則

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4)$$

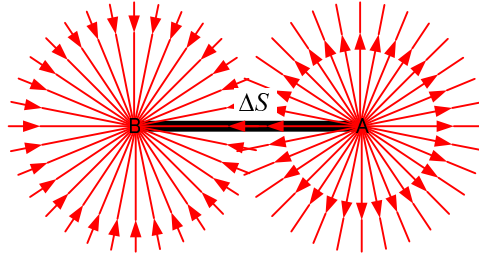


図 3: 電流保存則が成り立つ電流素

を使う。この式は、ある閉じた面の縁の磁場の線積分は、内部の電流密度の面積分に等しいと言っている。ビオ-サバールの法則を考えるために、積分を行う範囲は、教科書の通り、球の一部を切り取った範囲が適当である。この部分では、電流は一定である。なぜならば、微少電線の端では、球状に電流が発散及び収束しており、この部分球の表面はその端から等距離にある。従って、ここでの電流密度は、

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (5)$$

となる。また、対称性から、磁場の大きさも一定 ΔB となることは明らかである。

アンペールの法則、式(4)を用いて磁場 ΔB を計算することになるが、この左辺は簡単で

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\ell &= \Delta B 2\pi R \\ &= 2\pi r \sin \theta \Delta B \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

次に、式(4)の右辺を考えることにする。この右辺は、積分領域の電流を表している。ここでの、積分を行う部分の電流密度は一定で、 $j = \frac{I}{4\pi r^2}$ と分かっている。したがって、積分領域の面積さえ分かれば、電流は計算でき、右辺の値が分かることになる。教科書の図 5.9(b) の帯状の微少区間の面積は、

$$\begin{aligned} dS &= r d\theta' \times 2\pi r \sin \theta' \\ &= 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta' \end{aligned} \quad (7)$$

となる。従って全ての面積は、区間 $[0, \theta]$ で積分を行うことにより

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\theta 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta' \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' \\ &= 2\pi r^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

と求められる。従って、微少電線の A から流出する電流の総量は、この面積に電流密度をかければ求められ、

$$\begin{aligned} j_A S_A &= 2\pi r^2 (1 - \cos \theta) \frac{I}{4\pi r^2} \\ &= \frac{I}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。これは、距離に関係なく、角度のみに依存する。電流は保存され、球状に放出されるので当たり前のことである。

次に、同じ縁を持つ積分領域で教科書の図 5.9 の B 点から吸収される電流を計算する。先の A 点の放出電流の式が使える。異なるところは、角度のみである。したがって、B 点への吸収電流は以下ようになる。

$$j_B S_B = \frac{I}{2} \{1 - \cos(\theta - \Delta\theta)\} \quad (10)$$

A 点の放出電流と、B 点の吸収電流をあわせたものがトータルの電流で、

$$\begin{aligned} j_A S_A - j_B S_B &= \frac{I}{2} (1 - \cos \theta) - \frac{I}{2} \{1 - \cos(\theta - \Delta\theta)\} \\ &= \frac{I}{2} \{\cos(\theta - \Delta\theta) - \cos \theta\} \\ \Delta\theta &\text{は小さいので、テイラー展開して 1 次の項まで取る} \\ &\simeq \frac{I}{2} \{\cos \theta + \sin \theta \cdot \Delta\theta - \cos \theta\} \\ &\simeq \frac{I}{2} \sin \theta \cdot \Delta\theta \end{aligned} \quad (11)$$

となる。したがって、円 C_0 上のアンペールの法則は

$$2\pi r \sin \theta \Delta B = \frac{\mu_0 I}{2} \sin \theta \cdot \Delta\theta \quad (12)$$

となる。したがって、微小磁場は

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \Delta\theta \quad (13)$$

となる。ビオ-サバールの法則まで、後一步である。そのためには、 $\Delta\theta$ がじやまなので、書き換えなくてはならない。今考えている微少電流とその周辺の幾何学的配置は、図 4 のようになる。正弦定理

$$\frac{\Delta S}{\sin \Delta\theta} = \frac{r}{\sin(\theta - \Delta\theta)} \quad (14)$$

から、

$$\sin \Delta\theta = \frac{\sin(\theta - \Delta\theta)}{r} \Delta S \quad (15)$$

が導かれる． $\Delta\theta$ と ΔS が微少量としてテイラー展開し，1 次の項まで取ると，

$$\begin{aligned}\Delta\theta &\simeq \frac{\sin\theta - \cos\theta \cdot \Delta\theta}{r} \Delta S \\ &\simeq \frac{\sin\theta}{r} \Delta S\end{aligned}\quad (16)$$

となる．

式 (13) と (16) から，微小磁場は，

$$\begin{aligned}\Delta B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{\sin\theta}{r} \Delta S \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta s \sin\theta}{r^2}\end{aligned}\quad (17)$$

となる．これはビオ-サバールの法則に他ならない．

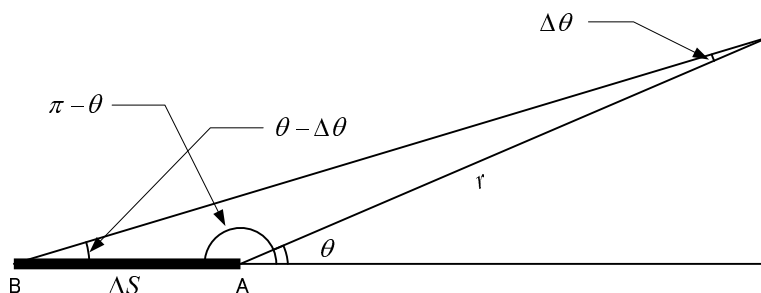


図 4: 微少電流とその位置関係

例題：円電流が作る静磁場 さて，これでビオ-サバールの法則を思う存分使える事が分かったので，例題として円電流が作る磁場を求めてみよう．問題のコイルの 1 個が軸上に作る磁場 B は，対称性により，軸上磁場は軸の方向に向いているはずである．その様子を図 5 の左の絵で示す．このコイルの小さい電流要素 δI が作る磁場は，ビオ-サバールの法則

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta \mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (18)$$

から計算できる．これから，その磁場は図 5 の右の絵のようになる．軸上の磁場 B は，微小電流 δI がつくる微小磁場 δB をコイルの一周にわたって，足し合わせれば良い．

図から分かるように，微小磁場 δB は軸の垂直成分もある．しかし，これは，コイル 1 週にわたって足し合わせると，ゼロになる．コイル 1 周にわたって合計すると，残るのは

軸上の成分のみである。コイルの軸上の成分は、

$$\begin{aligned}
 \delta B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta \mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \hat{z} \\
 &\quad \hat{z} \text{ は、軸方向の単位ベクトル} \\
 &\quad \delta \mathbf{I} \text{ と } \mathbf{r} - \mathbf{r}' \text{ は直交している} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta I |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cos \alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cos \alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta I}{z^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a \delta I}{(z^2 + a^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

となる。これをコイルの全ての電流で積分することになるが、 $\delta I = a \delta \theta I$ を利用すると計算が楽である。磁場は

$$\begin{aligned}
 B_z &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a^2 I d\theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 I}{(z^2 + a^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

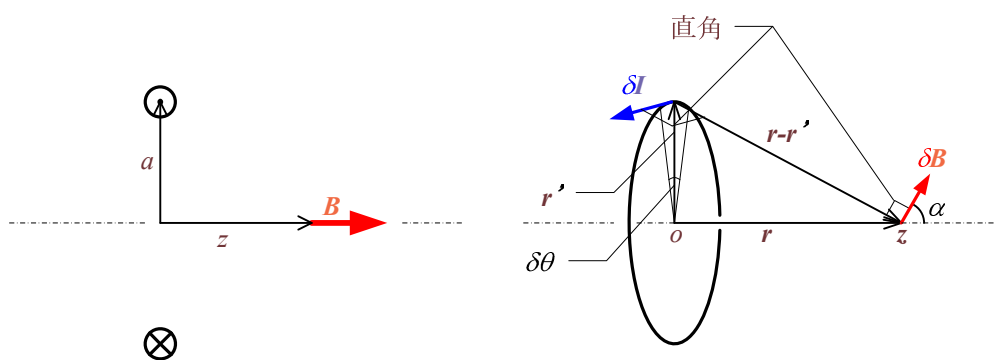


図 5: コイルが作る磁場

2 電流に作用する力（アンペールの力）

2.1 直線電流に働く力

前回の講義においては、距離 r 隔てられた二本の平行な電流間 I_1, I_2 には力が発生し、

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} dl \tag{21}$$

である事をビオとサバールが発見したと紹介した。この電流により作用する力を、アンペールの力と言う。それでは、この実験的に得られた力を、理論的に証明してみよう。

無限に長い直線電流どうしに働く力を考える。そのために、それが作る磁場を計算する。磁場は微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (22)$$

から導くのが簡単である。この直線電流から、 r 離れた場所で積分を行う。

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

左辺にストークスの定理を応用すると

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_2$$

$$2\pi r B_\theta = \mu_0 I_2 \quad (23)$$

これから、磁束密度は

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \quad (24)$$

となる。この磁束密度は元々、力から定義されていた。図6のように置かれた電線が単位長さ当たり受ける力は、

$$\Delta F = I_1 B \Delta \ell$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \Delta \ell \quad (25)$$

となる。これは式(21)に一致する。この式が意味する内容を、図7に示す。

式(25)に示した力は平行に導線を張った場合に働く力である。それに対して、平行でない場合は、

$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \quad (26)$$

となる。

3 ローレンツの力

3.1 荷電粒子に働く力

静電場において荷電粒子が受ける力はクーロン力として与えられる。それと同様に、静磁場中において電流が受ける力はアンペールの力で表された。それでは、電場と磁場の両方が存在する場（電磁場）において荷電粒子が受ける力はどうなるのであろうか。それがこれから示す、ローレンツの力である。

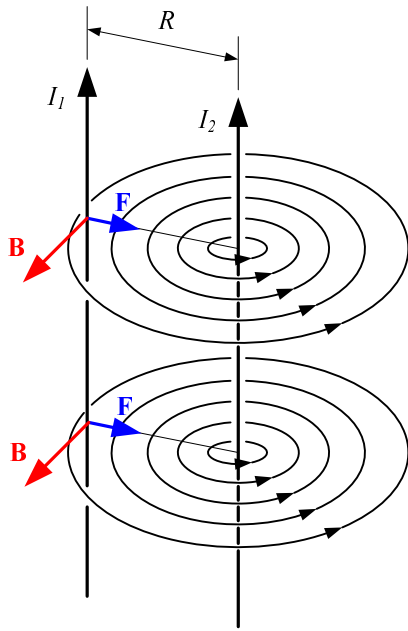


図 6: 2 本の平行導線に働くアンペールの力

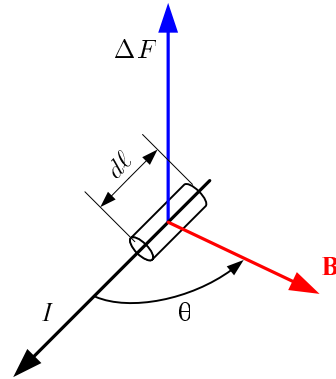


図 7: 電流要素に働くアンペールの力

電場中の荷電粒子は,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (27)$$

という力を受ける。これが電場の定義と考えて良い。次に考えるのは磁場中であるが、我々はアンペールの力の法則しか知らない。これから導くことにする。ある断面を dt の時間、 dQ クーロンの電流の電荷が流れる場合の電流は、

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (28)$$

となる。導線の中の電流を担う電荷の単位長さ当たりの密度を N とする。導線中で、電荷は一様な速度 v で移動しているとすると、 $dQ = Nqvdt$ となる。したがって、電流は、

$$I = Nqv \quad (29)$$

となる。この電流が流れている導線 (長さ $d\ell$) を磁場 $\mathbf{B}$ 中に入れると、

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I d\ell \times \mathbf{B} \\ &= Nqv \times \mathbf{B} d\ell \end{aligned} \quad (30)$$

という力をうける。この中に、 $Nd\ell$ の粒子があるので、粒子一つ当たりの力は

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{Nqv \times \mathbf{B} d\ell}{Nd\ell} \\ &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。これが磁場中で、荷電粒子が受ける力を示す。電場と磁場の力を合わせて、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (32)$$

となる。これが、電磁場中の荷電粒子が受ける力で、ローレンツ力と呼ばれる。

3.2 一様な静磁場内の粒子の運動

一様な磁場内での荷電粒子の運動を考える。ローレンツ力より、運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (33)$$

となる。力は磁場と速度の双方の直角方向に働いている。特に速度の直角方向に働いていることが重要である。速度の直角方向に力を受けるので、粒子は磁場からエネルギーを受けることはない。エネルギーは、力と移動方向の内積で、この場合

$$\begin{aligned} \Delta W &= \mathbf{F} \cdot \Delta \ell \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \Delta t \\ \mathbf{F} \text{ と } \mathbf{v} \text{ は直交しているから} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

となる。従って、運動エネルギーは一定で、速度の大きさも変化しない。もう少し想像力を働かせると、荷電粒子は磁場に巻き付くようにらせんに運動することがわかる。ちゃんと計算したければ、円筒座標系を使って計算すれば、このことは直ちに分かるであろう。

次に、粒子の速度が磁場と垂直の場合を考える。この場合、らせんは進むことが無く、粒子は平面内を等速円運動する。円筒座標系の運動方程式は、

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad (35)$$

となる。速度 v は一定なので、回転半径は、

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (36)$$

となる。速度が大きくなれば回転半径は大きくなり、磁場を強くすれば回転半径は小さくなる。また、角速度は $v = r\omega$ から

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (37)$$

となる。角速度は、粒子の速度に依存しないで一定の値となる。この ω をサイクロトロン角振動数と言う。

このように一様な磁場では、粒子の運動エネルギーに関係なく、一定の角速度で粒子は回転する。サイクロトロンと呼ばれる加速器は、この原理を利用している。粒子の回転周

波数に応じた電場により加速して、高エネルギーの粒子を得る装置である。ただし、粒子のエネルギーが大きくなると、粒子の質量が大きくなり、回転周波数が変化する。そうすると加速ができなくなり、サイクロトロンに限界となる。

また、粒子が完全にいつも磁場と垂直の速度を持つことはあり得ない。ほんのちよつとの角度を持っても、らせん運動が発生して、上下の磁極の衝突する。これを防ぐために、実際のサイクロトロンでは上下方向に安定な運動するようにしている。これは、完全に一様な磁場を用いるのではなく、少し変化させている。

4 演習問題

[練習 1] 教科書 p.85 の演習問題 (1).

[練習 2] 教科書 p.85 の演習問題 (2).

[練習 3] 一辺 l の二つの正方形回路を、間隔 d をおいて平行に正対させ、電流 I を同じ方向に流すとき、両回路間に働く力を求めよ。[2]

5 次回演習問題

[練習 1] 教科書 [1]p.97 の演習問題 (1).

[練習 2] 教科書 [1]p.98 の演習問題 (2).

[練習 3] 教科書 [1]p.98 の演習問題 (3).

参考文献

[1] 砂川重信, “電磁気学の考え方” 岩波書店, 2001

[2] 後藤憲一, 山崎修一郎, “詳解 電磁気学演習” 共立出版, 1970