

時間的に変動する電場と磁場 (ファラデーの電磁誘導の法則)

生産システム工学専攻* 電気磁気学特論
2015年7月7日(火)

概要

時間的に電場や磁場が変動する場合の電磁場の方程式を導出する。まずは、静電磁場を記述する微分方程式と電荷保存の法則を復習し、これらを拡張して変位電流を導入する。これに加え、ファラデーの電磁誘導の法則を微分方程式に組み込み、時間変動に対する電磁場の微分方程式（マクスウェル方程式）を示す。

1 電束密度と磁場の強さ

教科書 [1] の最初に電束密度 D と磁場の強さ H の式が書かれている (2 ページ目)。本講義では磁束密度 B と電場の強さ E を用いて、電磁場を表してきた。しかし、教科書を読むときに、あるときは D 、またあるときには E が登場したりと、混乱してしまう人もあると思う。そこで、混乱しないように簡単にそれらの関係を整理した方がよいだろう。結論から言うと次の関係がある。

$$D = \varepsilon E \quad (1)$$

$$B = \mu H \quad (2)$$

ここで、 ε は誘電率、 μ は透磁率を表す¹。これらの諸量の単位を表 1 に示しておく。

2 静電磁場

静電磁場を拡張して、時間変動の項を取り扱うのが分かりやすく良いだろう。そのために静電磁場の復習からはじめよう。

*秋田工業高等専門学校専攻科

¹特に考えている領域が真空中の場合、 ε_0 及び μ_0 と書く。

表 1: 電磁場を表す量と単位

記号	物理量	単位	SI 組み立て単位
D	電束密度	C/m ²	m ⁻² · s · A
B	磁束密度	T あるいは Wb/m ²	kg · s ⁻² · A ⁻¹
H	磁場 (の強さ)	A/m	A · m ⁻¹
E	電場 (の強さ)	V/m	m · kg · s ⁻³ · A ⁻¹
ϵ	誘電率	F/m	m ⁻³ · kg ⁻¹ · s ⁴ · A ²
μ	透磁率	H/m	m · kg · s ⁻² · A ⁻²

これまでに学んだように、静電場と静磁場はともにベクトル場である。ベクトル場を記述する微分方程式は、そのベクトル場の発散と回転である。そこで、電場 E と磁場 B の発散と回転を示すことにしよう。この辺りのお話は、以前講義で行った内容である。思い出して欲しい。

2.1 静電場の場合

2つの電荷があるとそれぞれは力を及ぼしあい、その力について述べたものがクーロンの法則である。図1のように2つの電荷がある場合、 q_1 の電荷が q_2 に及ぼす力 F_2 は、

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (3)$$

となる。これがクーロンの法則で、それは、

- 力の大きさは、それらの距離の2乗に反比例し、電荷量の積に比例する
- 力の方向は、2つの電荷を結ぶ直線状で、同じ電荷同士の場合は斥力で、異なる電荷であれば引力となる

と言っている。これから、直ちに作用・反作用の法則が成り立っていることが分かる。

これが静電場のすべてで、どんな問題でもこれを計算すれば原理的に解ける。宇宙全体の電荷をすべて計算すればよいのであるが、それは実際的でない。そのため、いろいろと数学的な工夫がなされた。ただ、数学的に式を変形したと思っはならない。かなり重要な概念が導入されることになる。

導入された概念のうち最も重要なものは、場の概念である。このクーロンの法則から静電場と言うものが考えられる。電荷が静電場を作り、その静電場が電荷に力の作用を及ぼすのである。先のクーロンの法則から、電荷 q_1 は \mathbf{r}_2 の位置に E_2 と言う電場を作るのである。この電場が電荷 q_2 に作用して、 F_2 という力を及ぼすのである。これは、

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (4)$$

$$F_2 = q_2 E_2 \quad (5)$$

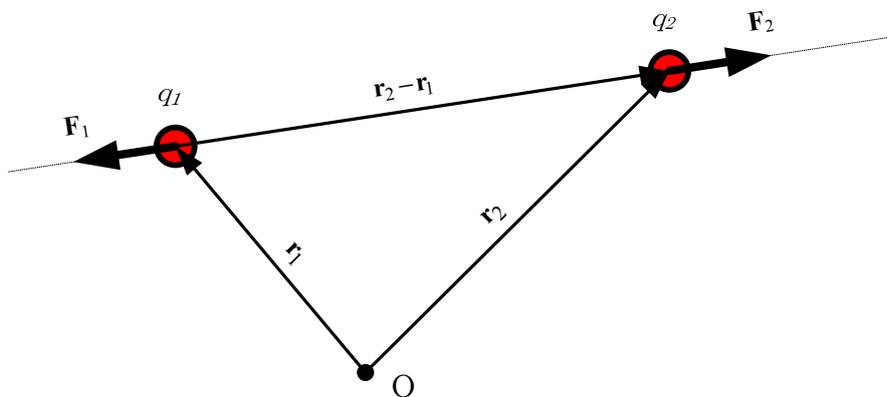


図 1: クーロン力

と書くことができる。これらの式は、式(3)とまったく同じと思えるかもしれない。しかし、決定的に異なることがある。式(3)は遠隔力で、何もない空間を通して力が2つの電荷間に作用している。一方、式(4)や式(5)は近接作用となっており、電荷は場を変化させて、その場の変化が力を生み出していると考えられる。

電場を求めることが静電場の中心的な問題となる。これが分かれば全ての静電場の性質が分かるからである。 r' の位置にある電荷 q が r の位置につくる電場 E を求める。これは式(4)から、直ちに

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6)$$

と得られる。この様子を図2に示す。

電荷が電荷密度 ρ [C/m³] で連続的に分布する場合、位置 r での電場は、式(6)より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (7)$$

となる。 $\rho(\mathbf{r}')$ は、 r' での電荷密度と言う意味である。ここでの電荷密度は、 r' の関数であって r の関数ではない。これに注意して、ベクトル解析の知識を使うと、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (8)$$

となることが分かる。ここで、積分の変数は r' であるが、勾配 ∇ は r を変数とする。この変数の違いには注意が必要である。

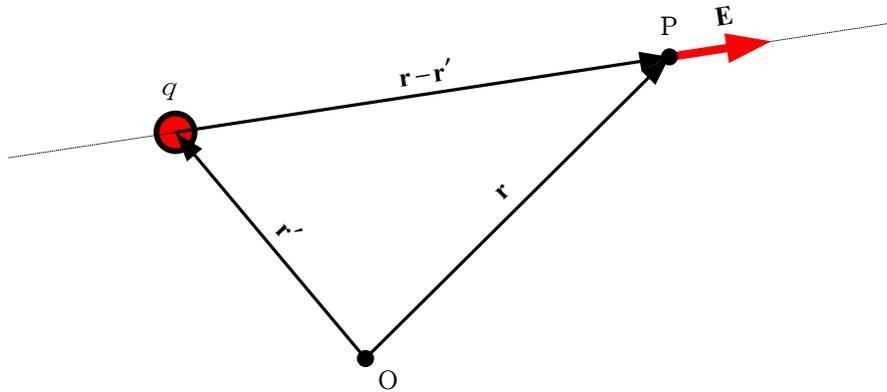


図 2: 電荷が作る電場

式 (8) の両辺の発散を計算する.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
 &\quad \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \text{ より } (\delta \text{ 関数のプリントを見よ}) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \times \{-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} dV' \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \\
 &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}
 \end{aligned} \tag{9}$$

これで、電場の発散が計算できた。当然、この式の座標変数は \mathbf{r} のみなので、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{10}$$

と書いてもよい。 \mathbf{r}' がないので、間違えることはない。この式を微分形の高スの法則と言う。

ベクトル場の微分方程式の片割れが分かった。残りは、回転である。先ほど、同様に一般化されたクーロンの法則の式 (8) の両辺の回転を計算する。式 (8) の両辺の発散を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
 &\quad \text{ベクトル恒等式 } \nabla \times \nabla\phi = 0 \text{ より} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

これで、電場の回転が求まった。電場の回転はゼロである。

以上をまとめると、電場を表す微分方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (12)$$

と書ける。

2.2 静磁場の場合

つぎに静磁場 \mathbf{B} を考える。静電場の場合、電場を作るものは電荷であった。それに対して、静磁場の場合の磁荷というものは発見されていない。従って、磁場の発散はつねにゼロである。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (13)$$

実際に磁場を作るものは電流である。1本の無限に長い直線電流 I が作る磁場は、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad (14)$$

となる。磁場は半径に反比例するため、電流を内部に含む閉じた曲線の線積分は

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I \qquad (15)$$

となることは以前述べたとおりである。この電流 I は積分路の内側である。これが連続的に、密度 \mathbf{j} で分布していると考えると、

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \qquad (16)$$

となる。ここで、ストークスの定理、 $\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ の出番である。これを式(16)の左辺に適用する。すると両辺とも面積分になる。この面積分は任意の領域で成り立つ。したがって、両辺の被積分関数は等しくなくてはならない。すなわち、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \qquad (17)$$

である。これで、無限に長い直線電流がつくる磁場、正確には磁束密度の回転が得られた。これは直線電流に限らず、くねくねまがる電流でも成り立つ。

以上の結果をまとめると、磁場が満たす方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \qquad (18)$$

となる。

3 電荷保存則と変位電流

ここまでは、静電磁場で時間的に何も変化しない場合を考えてきた。これからは、時間的に電荷や電流が変する場合を考察していこう。電荷や電流が変化すれば、電場および磁場が変化するので、その関係を調べることになる。

3.1 電荷の保存則

電荷は自然に発生したり消滅することはない—というのが実験事実である。このことは、電荷の総量は時間的に変化しないと言っている。これが電荷の保存則である。

この法則を考えると、ある任意の体積中の電荷量が増えるためには、その体積を囲んでいる壁を通して電荷の移動が起きなくてはならない。電荷の移動は電流そのものである。したがって、ある任意の体積中の電荷の総量の変化は、その壁を通しての電流の流れの積分に等しくなる。このことから、単位時間あたりの電荷の総量の変化は、壁を通して流れる電流の積分に等しくなる。いつものように、任意体積の外側に向かった法単位ベクトルを \mathbf{n} とすると、これらの関係は

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (19)$$

となる。この式の右辺にいつものようにガウスの定理を使うと、

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV \quad (20)$$

が得られる。この積分が任意の領域で成り立つことと、電荷密度は場所と時間の関数であることを考えると、

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (21)$$

となる。これは電荷の保存則を微分方程式で表したものである。この微分方程式は、連続の式とも呼ばれる。

3.2 マクスウェルの変位電流

静電場を表す4つの式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (24)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (25)$$

から始めることにする。静電磁場の場合、これらの式はまったく矛盾なく成立している。電磁場も電荷も電流もいつでも一定で、場所だけの関数であり、電場および磁場がそれぞれ独立した場として存在している。電場 \mathbf{E} の源は電荷 ρ である。磁場 \mathbf{B} の源は電流 \mathbf{j} である。この場合でも、先ほどの電荷の保存則は成り立つ必要はあるが、時間微分の項はゼロとなるので、

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (26)$$

が成立すれば良い。これに関係するのは、式 (25) だけで、矛盾なく成り立っている。この式の両辺の発散を取ると、左辺は回転の発散で、これは恒等式でゼロとなる²。

これからは、電磁場と電流および電荷が時間的に変化する場合を考える。まずは、電荷の保存則が成り立つ必要がある。もちろん、時間の変化をゼロとした場合には静電場の式を満足しなくてはならない。それでは、式 (25) の両辺の発散を取ってみよう。この場合、左辺は恒等式でゼロで、右辺は

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (27)$$

となる。今は $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ なので、電荷の保存則を満足しない。そこで、仮に式 (25) の発散が

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \left[\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \quad (28)$$

と書き換えたとする。そうすると、この式は電荷の保存則を満足する。これでも良いが、さすがに式が複雑である。そこで、式 (22) の助けをかりて、少し式を書き換えることを考える。少しばかり変形すると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \left[\nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] \\ &= \mu_0 \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ と $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ を利用すると、これは、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (30)$$

としても良いだろう。この式を導くとき式 (22) も変動する電磁場でも正しいとした—ことは良いのだろうか？。これまでの議論ではその良し悪しは分からない。次の議論で矛盾がなく、さらに実験事実として正しいことを説明する。

式 (30) は良さそうであるが、式 (22) もまた、電荷保存則を満足する必要がある。そこ

² $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ は覚えておきましょう。

で、この式の時間微分を考える。時間微分を取り、左辺と右辺を入れ替えると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ &\quad \text{式 (30) を用いると} \\ &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}) \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{j}\end{aligned}\tag{31}$$

となる。これは、電荷保存則そのものである。従って、式 (30) のようにすると、式 (22) はそのまま電荷保存則を満足しているといえる。

式 (30) の追加された項、 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ は変位電流あるいは電束電流と呼ばれ、マクスウェルが導入したものである。

4 ファラデーの電磁誘導の法則

静電磁場の微分方程式を、電荷保存の法則を満たすようにできたが、電磁場の時間変化を完全に記述する式としてはまだ不十分である。磁場が変化するとき電場が発生するファラデーの電磁誘導の法則を加えなくてはならない。

4.1 電磁誘導 (積分形)

エルステッドは電流が磁場を作ることを見つけた。このことを聞いたファラデーは磁場が電流をつくると考え実験を行った。正確ではないが、図3のような回路で実験をしたようだ³。まずは、閉回路 A に電流を流す。すると、鉄心の中に磁場が発生する。最初、ファラデーは閉回路 B に電流が流れると考えた。しかし、期待とは裏腹に電流は流れなかった。いろいろ実験をしているうちに、閉回路 A のスイッチを ON や OFF した瞬間に、電流が流れることに気づいた。

閉回路 B に電流が流れるのは、オームの法則により回路内に電圧が発生するからである。この電圧を誘導起電力といい、それは回路を貫く磁束 ϕ の時間的な変化に比例する。そして、その符号は、誘導起電力によって発生した誘導電流による磁束が回路を貫く磁束の変化を妨げるようになる。これを Lenz の法則という。もっと簡単に Lenz の法則を述べると、

- もし、回路内の磁束が増加するように外部から磁場を与えると、その回路内の磁束を減少するように誘導電流が流れる。

³僕は見たことがないので、想像である。

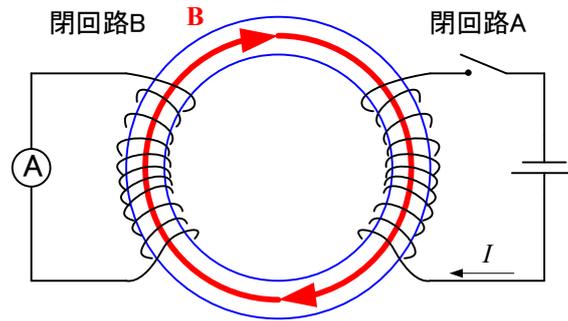


図 3: ファラデーの電磁誘導の実験

- もし、回路内の磁束が減少するように外部から磁場を与えると、その回路内の磁束を増加するように誘導電流が流れる。

である。要するに、誘導電流は回路のトータルの磁束の変化を妨げるのである。これは、誘導起電力 $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} \end{aligned} \quad (32)$$

と書ける。

ファラデーは閉回路 B がなくても、閉回路 A は電場を作ると考えた。この考えを単純にすると、図 4 のようになる。もっと単純化すると、閉回路 A がなくても、磁場が変化すれば電場ができると考えることもできる (図 5)。これは、最初の実験からかなり飛躍しているが、さまざまな検証の結果正しいと言うことがわかっている。したがって、式 (32) は導体がある閉じた回路ではなく一般的な電磁場について成り立つことになる。電磁場のみで記述すると、

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} \quad (33)$$

となる。これが積分形のファラデーの法則である。

4.2 微分形のファラデーの法則

これまでの講義ので説明したとおり、積分形は物理量を求める場合には都合がよいが、理論的な取り扱いには不便である。そこで、先ほどの積分形のファラデーの法則である式 (33) を微分形に直しておこう。そのためには、ストークスの定理 $\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS}$ を使えばよい。式 (33) の左辺にストークスの定理を適用し、右辺の時間微分を積分の中に入れて、

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ndS} \quad (34)$$

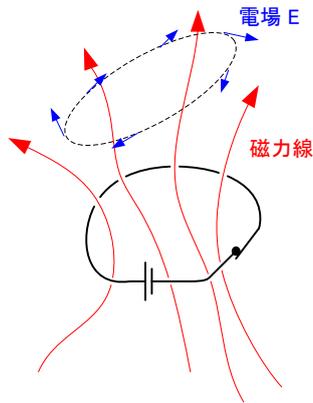


図 4: 電流の変化が磁場の変化を引き起こし、それが電場を作る。

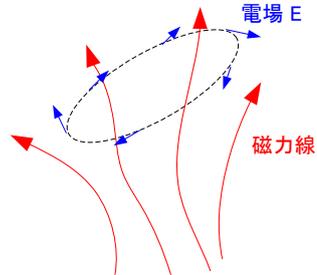


図 5: 磁場の変化が電場を作る。

となる。左右の被積分関数が等しいわけだから、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (35)$$

となる。これが微分形のファラデーの法則である。

この式には電荷密度 ρ や電流密度 \mathbf{j} は関係していないので、電荷保存の法則を考える必要はない。

5 まとめ (マクスウェルの方程式)

ここでは、静電場を記述する式から出発し、電荷保存則とファラデーの電磁誘導の法則が成り立つように、電磁場の発散と回転の式を拡張した。これにより、電磁場 (\mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H}) 及び、電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} の全ての変数が時間の項を含ませることができる。全て書き出すと、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (37)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (38)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (39)$$

となる。ただし、電磁場がある媒質の性質を決める誘電率 ε と透磁率 μ をとおして、

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (40)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (41)$$

の関係がある。

全ての変数は位置 \mathbf{r} と時間 t の関数となっている。これが電磁場を記述する完全な方程式であり、この4つの式はマクスウェル (Maxwell) の方程式と呼ばれている。これが計算できれば、全ての電磁気の問題は解けることになる。

6 演習問題

[練習 1] 教科書 [1]p.97 の演習問題 (1).

[練習 2] 教科書 [1]p.98 の演習問題 (2).

[練習 3] 教科書 [1]p.98 の演習問題 (3).

7 次回演習問題

[練習 1] 教科書 [1]p.110 の演習問題 (1).

[練習 2] 教科書 [1]p.110 の演習問題 (2).

[練習 3] 教科書 [1]p.110 の演習問題 (3).

参考文献

[1] 砂川重信, “電磁気学の考え方” 岩波書店, 2001