電磁気学の基本法則
(マクスウェル方程式と電磁ポテンシャル)

生産システム工学専攻[*]　電気磁気学特論
2015 年 7 月 14 日 (火)

概 要

電磁場を記述するマクスウェル方程式を示し，エネルギー保存則を考える事でポインティングベクトルを導出する．さらに，電磁ポテンシャルを導入し，ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの波動方程式を示す．

1　マクスウェルの方程式

1.1　ここまでの復習

お話を進める前に，これまでに登場した電磁気学の方程式をまとめておこう．時間的に変動する場合を考慮した電磁場を記述する微分方程式は，式 (1)〜(4) のようになる．これらの 4 組の方程式 (左は積分形，右は微分形) をマクスウェルの方程式という．これは，電磁気学の全てが含まれており，ニュートン力学とともに，古典物理学の 2 本の柱となっている．

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2}$$

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\int_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4}$$

ただし，この方程式中の $\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{E}$ は電場の強さ，$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さを表す．また，ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度である．

[*]秋田工業高等専門学校専攻科

この方程式の電束密度と電場の強さ，磁束密度と磁場の強さには，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{6}$$

の関係がある．この ε_0 と μ_0 は，物質の電磁気的な性質を表す量で，誘電率と透磁率と呼ばれている．特に ε_0 と μ_0 は真空中のものを表し，任意の物資中だと単に ε, μ と書かれる．

荷電粒子の運動を記述する場合，その運動はあくまでニュートンの運動方程式にしたがい，荷電粒子に与えられる力はローレンツ力であった．この運動方程式は，

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{7}$$

という形をしていた．ローレンツ力がわかれば，このニュートンの運動方程式を解くことで荷電粒子の振る舞いが理解できるのである．

また，オームの法則はこの運動方程式から導出される二義的な側面を持っていることは，よく覚えておこう．

1.2 古典物理学のすべて

「ファインマン物理学 III 電磁気学」[2] には，1905 年まで知られている物理学の基本法則は，表 1 が全てであると書かれている [1]．

マクスウェルの方程式は 1864 年に発表された．そして，1905 年にアインシュタイン特殊相対性理論を発表した．これにより，電磁気学と力学の矛盾が解決され，古典物理学が完成した．この特殊相対性理論ではマクスウェルの電磁気学はそのまま生き残り，ニュートンの力学が修正された．

2 エネルギー保存則

古典力学の講義（力学，構造力学などの講義）で学んだように，エネルギー保存則はどのような場合でも成り立っていること，理解できるだろう．今，ある電磁場空間内に荷電粒子が存在し，運動しているような体系を考える．この場合，考えている空間内部では，荷電粒子の運動による力学的なエネルギーと，電磁場が持つ電磁エネルギーが存在することになる．このような場合，エネルギー保存則はどのように成立しているのかを見てみよう．これを考えることにより，荷電粒子と電磁場がある空間からのエネルギーの流速を与える，ポインティングベクトルという便利なものを定義することができる．

エネルギー保存則については，完全に教科書 [1] に沿って説明していこう．電磁場中での運動方程式は，

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{8}$$

[1] ファインマンの教科書の表では電荷保存則が書かれているが，マクスウェルの方程式から導くことが出来るので，ここでは除いた．さらに，万有引力の法則も記述方法についても，ベクトル表現を変えている．

表 1: 古典物理 [2]

・マクスウェルの方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(閉局面を通る電束) = (内部の電荷)}/\varepsilon_0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(ループをめぐる } \boldsymbol{E} \text{ の線積分)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{(ループを通る } \boldsymbol{B} \text{ の流速)}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(閉局面を通る } \boldsymbol{B} \text{ 流速)} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad c^2\text{(ループをめぐる } \boldsymbol{B} \text{ の線積分)} = \text{(ループを通る電流)}/\varepsilon_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{(ループを通る電束)}$$

・力の法則

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

・運動の法則

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \qquad \text{ただし，} \quad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(アインシュタインの修正によるニュートンの法則)

・万有引力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|r_1 - r_2|^3}$$

と書ける．$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は，考えている空間に与えられている電場と磁場である．今，電磁場中に 2 つの電荷があったとする．それぞれの電荷量を q_1 と q_2，質量を m_1 と m_2 とする．それぞれの運動方程式は，

$$m_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_1}}{\mathrm{d}t} = q_1\boldsymbol{E} + q_1\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{B} \tag{9}$$

$$m_2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_2}}{\mathrm{d}t} = q_2\boldsymbol{E} + q_2\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{B} \tag{10}$$

となる．ここで，荷電粒子の運動エネルギーについての議論を行いたいので，この両辺に

$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ をそれぞれ乗じるてみる．そうすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2\right] &= q_1\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{E} + q_1\boldsymbol{v_1}\cdot(\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{B}) \\
&= q_1\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{E} \qquad (11)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m_2 v_2^2\right] &= q_2\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{E} + q_2\boldsymbol{v}_2\cdot(\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{B}) \\
&= q_2\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{E} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となる．ここでは，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ は直交することを利用した．左辺の括弧内は運動エネルギー $\boldsymbol{T}$ を表している．

系全体の運動エネルギーの変化と電磁場の関係を考察するために，先ほどの 2 つの運動方程式を足しあわせよう．この操作をするときに，荷電粒子は大きさを持つものとし，その電荷密度を ρ とする．したがって，電流密度は $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ となるので，これを考慮すると，

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right] = \int_V (\boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2)\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{13}
$$

となる．積分領域は考えている系全体であることに注意しよう．

次に，マクスウェルの方程式の式 (4)（アンペール・マクスウェルの法則）を使う．すると，

$$
\boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 = \nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{14}
$$

となる．この式は，電磁場を微分するとそれは電流密度になると言っているだけである．その電磁場とは，2 粒子が作るものともともと存在する電磁場のことも含まれている．この式を使うと，2 粒子の運動エネルギーに関する式は

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right] = \int_V \left(\nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{15}
$$

となる．この式の左辺は荷電粒子の運動エネルギーに，いっぽう右辺は電磁場に関するものである．だんだんと，力学的なエネルギーと電磁場のエネルギーの関係に近づいてきた．

さて，

$$
\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H} \tag{16}
$$

のようなベクトル恒等式がある．これを用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right] &= \int_V\left[\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right]\mathrm{d}V \\
&= \int_V\left[\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right]\mathrm{d}V-\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V \\
&= \int_V\left[-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right]\mathrm{d}V-\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_V\left[\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right]\mathrm{d}V-\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right]\mathrm{d}V-\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right]\mathrm{d}V-\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad (17)
\end{aligned}$$

となる．左辺は粒子の運動エネルギーの変化を，右辺第一項は電磁場のエネルギーの変化を，そして第二項は，エネルギーの流れを表している．本当に？ここでそれをしっかり見てみることにしよう．もう少し考えやすいように，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)\mathrm{d}V\right]+\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0 \qquad (18)$$

と移項して整理してみる．それぞれの項は，

$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$	粒子の運動エネルギー [Jule]
$\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$	磁場のエネルギー密度 [Jule/m^3]
$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$	電場のエネルギー密度 [Jule/m^3]
$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$	単位面積あたりのエネルギーの流れ [Watt/m^2]

を意味している．運動エネルギーについては，力学で学習したとおりである．電磁場のエネルギーに関しては静電場での話と同じである．最後の項のみがここで新しく登場したものである．エネルギー保存則を満足させるためには，最後の項のエネルギーの流れ [Watt/m^2] が必要となってくるのである．$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ の単位から考えるとエネルギー密度の流れになっている．このエネルギーの流れのベクトル

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \qquad (19)$$

は，発見者の名から，ポインティングベクトルと呼ばれている．

これらのエネルギーの関係は，図 1 のように表すことができる．

最後に，式 (18) が意味するところを言葉で表現しておこう．それは，荷電粒子のもつ運動エネルギーと電磁場のエネルギーの和の単位時間あたりの減少量は，領域 V をかこむ平曲面 S を通って，外部に流出する $\boldsymbol{S}$ という量に等しい．

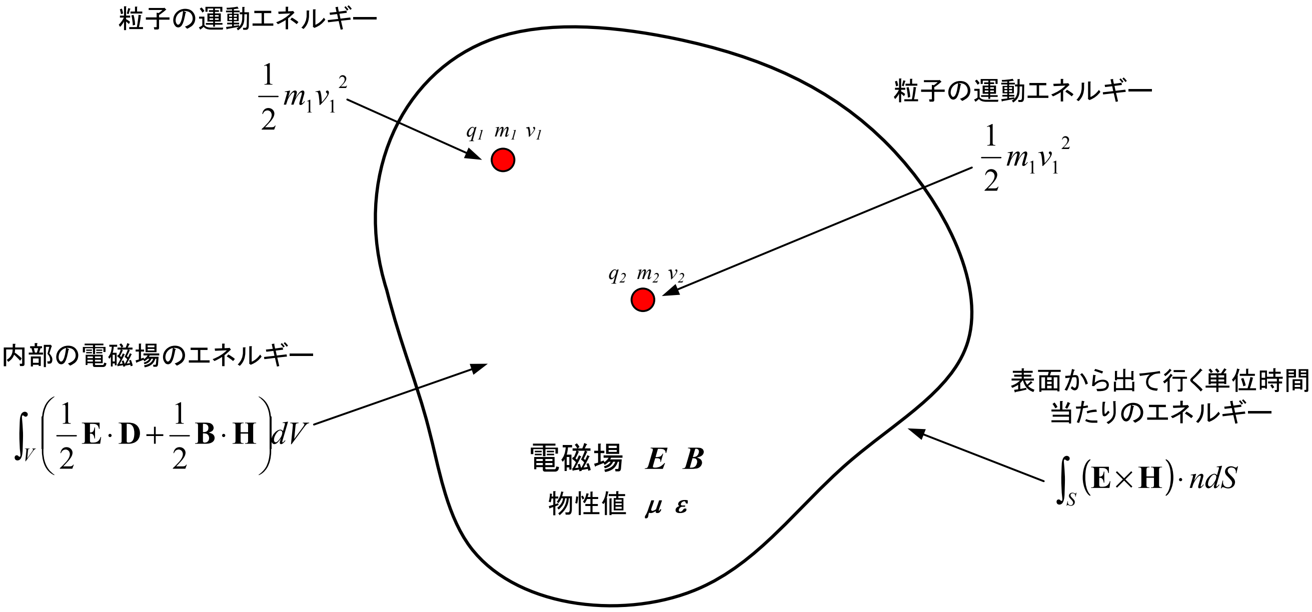

図 1: 電磁場と力学のエネルギーの関係

3　電磁ポテンシャル

ここまでの議論で，電磁場はマクスウェル方程式によって表現できることがわかった．マクスウェル方程式なる微分方程式を解くことで，電場や磁場を求めることができるのである．しかしながら，実際にマクスウェル方程式を解いてみようとしても，見た目は美しいものの，4 つの式の中には電場，磁場，電流，電荷が複雑に組み合わさり，とても解けそうにない．そこで，電磁ポテンシャルというものを導入することにより，問題解決にアプローチしやすくなる．

具体的には，電磁ポテンシャルとは，静電場および静磁場で登場したスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル A を時間変動に対応した形で与えることになる．そして，この電磁ポテンシャルを求めることで，電磁場を計算することになる．手間が 1 つ増えることになり，何がうれしいのか？静電場の時を思い出して欲しい．ベクトルである電場を計算するには，難しい積分の中で 3 つの成分を計算しなくてはならないが，スカラーポテンシャルを計算すれば 1 つの成分ですむ．それを微分すれば電場が求まるのである．それを，時間変動のある一般的な場合でも成立するように，話を拡張していくのである．

3.1　静電磁場のポテンシャル

お話を進める前に，静電場と静磁場の時のポテンシャルのお話を思い出しておこう．

静電場では，スカラーポテンシャル ϕ を導入して，それの勾配が電場を表すとした．す

なわち，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{20}$$

である．これは，静電場の $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ を満たすように選んだと考えてもよい．一方，静磁場では $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ の関係がある．したがって，

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{21}$$

というようなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が考えられる．このベクトル $\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルと言う．これらのスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルには，名前の最後にポテンシャルがついている．エネルギーと関係しているのである．それは，

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \rho\phi \mathrm{d}V \qquad\qquad U_M = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{22}$$

となる．U_E は電荷がポテンシャルの中にあるとして，それが持つ全エネルギーである．この式は直感的に理解できるであろう．電圧と電荷量の積となっている．もうひとつの式は磁場の中に電流があるときにその電流がもつポテンシャルエネルギー U_M を示している．

ところで，式 (18) の

$$\frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\,\mathrm{d}V \tag{23}$$

も電磁場のエネルギーを表している．これと，ポテンシャルを使ったエネルギーはどのように違うのだろうか?．考え方は異なるが，まったく同じ物理的な内容である．かたや場のエネルギーという考え方，もう一方は電荷や電流がポテンシャルエネルギーと持つと考えている．いずれの場合でも計算結果は同じである．

3.2　時間変動する場への拡張

ポテンシャルの考え方は何かと便利なので，時間的に変動する電磁場にも導入したい．そこで，静電磁場のポテンシャルを拡張することを考える．ベクトルポテンシャルは，静磁場の $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ の関係式から導入した．これは時間的に変化する場合でも成り立つ—式 (2)—ので修正の必要はない．スカラーポテンシャルの方はまずい．$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ とすると，式 (3) の左辺が恒等的にゼロになってしまう [2]．そこで，式 (3) を

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

と左辺を移項して $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ を使って

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{25}$$

[2] ベクトル恒等式，勾配の回転はゼロである．$\nabla\times\nabla\phi = 0$

と書き換える．すると，回転がゼロとなるベクトル場は，あるスカラー場の勾配と書くことができる．あるスカラー場を ϕ とすると

$$-\nabla\phi = \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{26}$$

である．マイナスがつくのは習慣に過ぎない．したがって，電場は

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{27}$$

と表すことができる．この表現は，静電場の時の式 (20) の時間変動のある場合の表現に対応しており，時間依存のあるスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ を，電磁ポテンシャルと呼ぶ．

この時点は，辻褄が合うように式 (27) を定めただけなので，電磁ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ を決定する方程式が必要となる．そこで，この電磁ポテンシャルを導入することで，マクスウェルの方程式を書き換えてみよう．$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ を使うと，マクスウェルの方程式は

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{29}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{30}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{31}$$

となる．これらの連立微分方程式は，元の方程式 (1)–(4) と同じくらい複雑である．こんなに複雑だとポテンシャルを導入したメリットはない．そこで，これらの式を変形して，変数分離形にすることを目指す．具体的には，ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルのそれぞれの微分方程式を導くのである．これが，電磁ポテンシャルを決定する式となる．

まずは，式 (30) をベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルで書き換える．式 (30) に式 (29) を代入すると

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{32}$$

となり，整理すると

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{33}$$

である．

つぎに，式 (31) に式 (30) に式 (29) を代入する．すると，

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{34}$$

となる．これをベクトル恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ を使って

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{35}$$

のように書き直す．整理すると

$$-\nabla^2\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{36}$$

となる．

これで，電磁ポテンシャルを決定する式として，式 (33) と (36) が得られた．しかし，これでもまだ式中にベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルが共存しているため，取り扱いにくい．そこでもう少し簡単にしてみる．ベクトル場は，回転と発散により決めることができるということを思い出そう．ベクトルポテンシャルの回転は，式 (28) により決められている．発散の方は特に制限がなく，勝手に決めることができるので，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{37}$$

のように決める．これをローレンツゲージと言う．正確には，ここで登場する ϕ と $\boldsymbol{A}$ は任意の関数 χ を用いて $\boldsymbol{A}^{(L)}=\boldsymbol{A}+\nabla\chi,\phi^{(L)}=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}$ なる関係を満たすものである．この辺りの詳細は，講義で行うとイメージが崩れてしまいそうだから，教科書で各自読んで欲しい．このようにすると，

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j} \tag{38}$$

$$\nabla^2\phi-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{39}$$

となる．2 つとも波動方程式で，ベクトルポテンシャルの源は電流，スカラーポテンシャルの源は電荷となっている．これでベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを独立して計算できるようになった．電磁場を計算したければ，まずベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを式 (38) と (39) で計算し，その後電場と磁場を表す式 (27) と (28) により求めればよい．それにしても，対称性がよく美しい式である．

4 演習問題

[問 1] 教科書 [1]p.110 の演習問題 (1).

[問 2] 教科書 [1]p.110 の演習問題 (2).

[問 3] 教科書 [1]p.110 の演習問題 (3).

5　レポート

ここまでの内容について，以下の演習問題の解答をレポートとして提出すること．提出方法は，次の通りとする．

[問 1] 半径 a, b の同心球からなるコンデンサで，外球を設置するときと，内球を設置するときの静電容量をそれぞれもとめなさい．[3]

[問 2] 三角形 ABC の導線回路に電流 I が流れているとき，内心に生じる磁場の大きさをもとめなさい．また，一辺が l の正三角形の場合はどうなるか．[3]

[問 3] 自由空間におけるマクスウェル方程式より，電場及び磁場の波動方程式を導きなさい [予習].

期限	7 月 21 日 (火)17:00 まで
用紙	A4
提出場所	坂本研究室の入口のポスト.
表紙	表紙を 1 枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気磁気学特論」 課題名「課題　電磁気学演習」 生産システム工学専攻　学籍番号　氏名 提出日
内容	問題の解答．計算過程の文章による説明を必ず書くこと．

参考文献

[1] 砂川重信, “電磁気学の考え方” 岩波書店，2001

[2] Richard P. Feynman, “ファインマン物理学 III 電磁気学” 岩波書店，2003

[3] 後藤憲一，山崎修一郎, “詳解　電磁気学演習” 共立出版，1970