

電磁波

生産システム工学専攻* 電気磁気学特論
2015年9月1日(火)

概要

電荷や電流が存在しない場合（自由空間）におけるマクスウェル方程式を考え、電磁場が満たす波動方程式を導く。またこの波動方程式（電磁波）の性質を議論し、電磁波が光と全く同じものであることを示す。電磁波のエネルギーについても議論し、ポインティングベクトルの意味するところと等しいことを示す。

1 自由空間内の電磁波の波動方程式

1.1 電磁場の波動方程式（電磁波）

この講義では、電場や磁場を近接作用に従う形で議論してきた。これは、空間に任意の距離を隔てて置かれた二つの荷電粒子間に作用するクーロンの法則を説明する上で必要だった。荷電粒子が周りの空間に電場を作り、その電場が離れた点にある別の荷電粒子に作用するのである。携帯電話やテレビ放送が、離れた地点間の通信手段として普及した事実は、これから登場する電磁波によるものである。

最初に、真空中で電荷や電流が存在しない場合（これを自由空間と呼ぶ）の電磁場を考えてみよう。電荷や電流が存在しない空間だから、電場や磁場もゼロと考えるかもしれない。これまでの講義で、電場と磁場の源は、電荷と電流であると説明したのだから、そう思うだろう。実際に、マクスウェル方程式を見て、自由空間ではどのようなことが起きているのか、考えてみよう。自由空間では、電荷と電流は存在していないので、マクスウェル方程式は以下のように書ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

*秋田工業高等専門学校専攻科

$\mathbf{B} = 0$ と $\mathbf{E} = 0$ は、この電場と磁場を表す微分方程式の解としてふさわしいのは一目瞭然である。つまり、自由空間において電場も磁場もない状態はありうるのである。しかし、ここで終わってしまったのでは、美しい電磁波の議論ができなくなってしまう。そこで興味の対象となるのが、この微分方程式に他の解は存在しないかである。そういう訳で、他の解を探してみよう。

自由空間のマクスウェル方程式は、ベクトルの連立偏微分方程式であるので、これを直接解いて解を得るのは大変である。そこで、少しでも簡単に考えるために、このマクスウェル方程式を電場、磁場それぞれ独立の方程式として書き換えたい。それには、以下のようになると実現できる。

式 (3) の両辺の回転を取ると

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \\ &\text{式 (4) より} \\ &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

となり、電場のみの式にできる。ここで、右辺第一項であるが、これはベクトル恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使い、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ &\text{式 (1) より} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

と変形できる。これで、電場のみの微分方程式が得られた。

磁場についても同様の式が得たい。式 (4) の両辺の回転をとることから始めると、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) \\ &\quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \text{ と式 (3) より} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \\ &\quad \text{式 (2) より} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{B} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

以上の操作により、自由空間中での電場と磁場を表す2組の方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

が得られた。次に興味が湧くのは、この電場と磁場を表す微分方程式が一体どのような物理的意味を持つかである。

この方程式は、波動方程式である。波動となれば、近接作用の考え方が生きてくる。空間の電場と磁場は波動として空間に存在していることになる。ラジオや携帯電話、テレビ放送を直感的にイメージして欲しい。基地局から発信された電場と磁場は、波として空間を伝わり、家に設置しているアンテナや携帯電話で受信する。

2 電磁波

ここでは、先ほどの電磁場の波動方程式のもっとも単純な解である三次元平面波について直交座標系で考え、波の性質について迫ってみよう。

2.1 三次元平面波

先程述べたように、自由空間の電場を表す式 (8) は波動方程式で、その解は波になっている。波といってもベクトルである電場の波である。この解として

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E) \quad (10)$$

を仮定する。ここで、 $\mathbf{k}_E$ は波数ベクトルと呼ばれるものであり、添字の E は電場の波であることを指している。波数ベクトルとは、一次元問題の波数 ($k = 2\pi/\lambda$) に対応するものである。この解の式のパラメーターを適当に決めれば、これは元の波動方程式の解の一つになる。

ここで、 $\mathbf{k}_E$ はベクトルなので、直交座標系では

$$\mathbf{k}_E = (k_{Ex}, k_{Ey}, k_{Ez}) \quad (11)$$

と成分で書き表すことができる。もちろん、 $\mathbf{r}$ は位置を表すベクトルなので

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (12)$$

である。従って、式 (10) 中の $\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r}$ は、 $k_{Ex}x + k_{Ey}y + k_{Ez}z$ と書き表すことができる。

次に波数ベクトル $\mathbf{k}$ の意味を考えてみよう。式 (10) 中の $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ は、位相である。そこで、この位相一定が場所 $\mathbf{r}$ 、すなわち波面がどうなっているか考える。一定の位相を ϕ_0 とすると、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \phi_0$ なので、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \phi_0 + \omega t \quad (13)$$

となる。もちろん、波面はある瞬間の状態なので、同じ波面の上では右辺は一定の値となる。このことから、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ が一定の値の場所を結ぶと波面となることがわかるだろう。もちろん、 $\mathbf{k}$ は波によって決まった値なので、定数である。従って、3次元空間中のこれが一定の値になる場所 $\mathbf{r}$ を探すことになる。式 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ は、 $\mathbf{r}$ ベクトルの $\mathbf{k}$ 軸への射影と考えるこ

とができる。これが一定の面は、図1のように平面となることは明らかである。そして、この平面(波面)は $\mathbf{k}$ と垂直になり、 $\mathbf{k}$ の方向に移動する。これは、 Δt 秒後の波面を考えれば明らかである。

もう少しこれを定量的に評価することにするのが良いだろう。 t と $t + \Delta t$ 秒の位相 ϕ_0 の波面の位置をそれぞれ、 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ とすると

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \phi_0 + \omega t \quad (14)$$

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \phi_0 + \omega(t + \Delta t) \quad (15)$$

となる。この式の辺々を引くと

$$\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r} = \omega \Delta t \quad (16)$$

となる。この式の意味は、成分で書き表すと

$$k_x \Delta x = \omega \Delta t \quad k_y \Delta y = \omega \Delta t \quad k_z \Delta z = \omega \Delta t \quad (17)$$

となり、かなりわかりやすくなる。これから波面の速度は、

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_x} \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_y} \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_z} \quad (18)$$

と書き表すことができる。これは、波面の移動する速度で、位相速度と呼ばれる。これまでの話で、これが位相速度と呼ばれる理由がわかっただろう。成分で表された位相速度をベクトルで書き表すと、

$$\mathbf{v} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (19)$$

となる。右辺の $\omega/|\mathbf{k}|$ は速度の大きさを、 $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ は方向を表す単位ベクトルになっているのである。

これまでの話で、式(10)が3次元の平面波を表すことがわかった。この平面波がマクスウェルの方程式から導かれた波動方程式(8)の解になっているためには、パラメーターである角振動数 ω_E と波数 $\mathbf{k}_E$ はどのような関係になっている必要があるかを見てみよう。それを調べるためには、式(10)を式(8)の中に入れてみれば良い。すると、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} \quad (20)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (E_x, E_y, E_z) \sin(k_{Ex}x + k_{Ey}y + k_{Ez}z - \omega_E t + \theta_E) \quad (21)$$

$$= -(E_x, E_y, E_z)(k_{Ex}^2 + k_{Ey}^2 + k_{Ez}^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega_E^2) \sin(k_{Ex}x + k_{Ey}y + k_{Ez}z - \omega_E t + \theta_E) \quad (22)$$

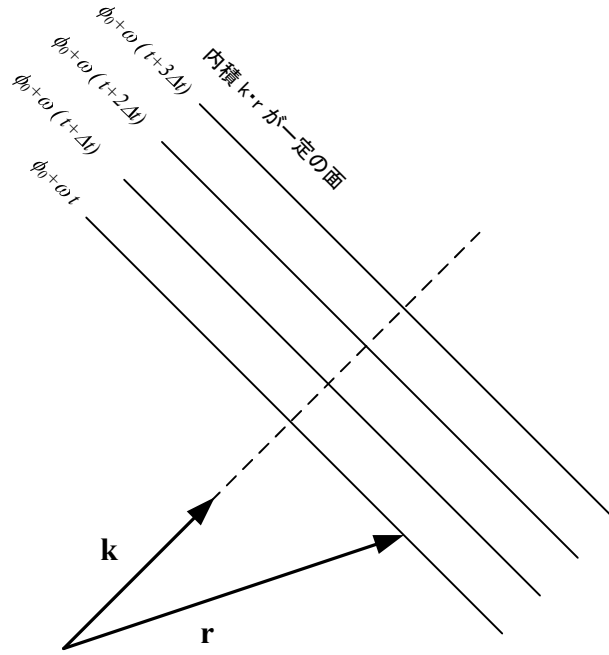


図 1: 波面と波数ベクトル k との関係

となる．式 (8) の要請により，この右辺は恒等的にゼロになる必要がある．任意の電場，任意の場所で，いつでもこの式が成り立つためには，

$$k_{Ex}^2 + k_{Ey}^2 + k_{Ez}^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega_E^2 = 0 \quad (23)$$

とならなければならない．波数ベクトル k_E と角振動数 ω_E の関係を表したこのような式のことを分散関係と言う．媒質中の波の性質を表す大事な関係である．

この式をつかって，波の速度を計算してみよう．波の速度の大きさは，式 (19) から，

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega_E}{|k_E|} \\ &= \sqrt{\frac{\omega_E^2}{k_{Ex}^2 + k_{Ey}^2 + k_{Ez}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \end{aligned} \quad (24)$$

となることがわかる．これから，電磁波の速度は誘電率と透磁率から求めることができる．誘電率は $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{12}$ ，透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ である．これから，電磁波の速度は 2.997×10^8 となる．

これは，何と光の速度と同じである．今後は光の速さを c として，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (25)$$

の記号を用いることにする。電磁波とは光なのである。いや、光とは電磁波であると言った方が正しい。違うのはその波長であり、一般的な通信に用いられる電磁波の波長は、可視光の波長に比べ、ものすごく長い。それにしても、磁石や静電気の現象が光と関係しているのは驚きである。

今までは、電場の平面波について論じて、式(10)が自由空間中のマクスウェルの方程式の解の一つになっていることを示した。同様に磁場の平面波

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r} - \omega_B t + \theta_B) \quad (26)$$

もマクスウェルの方程式の解になっているのは明らかである。

これで、電場と磁場の波動としての特徴がわかった。次は、これらの解がマクスウェル方程式を満たすための条件を詳しくみていくことにしよう。

2.2 横波としての電磁波

波動方程式の解となってる $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を自由空間のマクスウェルの方程式の式(1)から(4)に当てはめて、真の解の条件を探していこう。

2.2.1 波の進行方向と電場

電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ 、そして波の移動方向 $\mathbf{k}$ との関係を調べる。まずは電場で、式(1)に平面波の式(10)を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E)] \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{E}_0) \sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E) + \mathbf{E}_0 \cdot \nabla [\sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E)] \\ &\quad \mathbf{E}_0 \text{ は定ベクトルであるから、} \nabla \cdot \mathbf{E}_0 \text{ はゼロになるので} \\ &= (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \sin(k_{Ex}x + k_{Ey}y + k_{Ez}z - \omega_E t + \theta_E) \\ &= (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) \cdot (k_{Ex}, k_{Ey}, k_{Ez}) \cos(k_{Ex}x + k_{Ey}y + k_{Ez}z - \omega_E t + \theta_E) \\ &= \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k}_E \cos(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E) \end{aligned} \quad (27)$$

となる。自由空間では $\nabla \cdot \mathbf{E}$ がゼロになるので、この式の右辺も恒等的にゼロとなる必要がある。これが、いつでもどこでも成り立つためには、

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k}_E = 0 \quad (28)$$

でなくてはならない。これは、電場と平面波の進む方向が直交していると言っている。すなわち、電場の波は横波なのである。

2.2.2 波の進行方向と磁場

電場の波の式 (10) と磁場の波の式 (26) は全く同じ形をしている。また、電場の発散の式 (1) と磁場の発散の式 (2) も同じ形をしている。したがって、磁場の場合も

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}_B = 0 \quad (29)$$

が成り立つ。やはり、磁場と平面波の進む方向は直交しており、横波になっている。

2.2.3 残りのマクスウェルの方程式

平面波について、マクスウェルの方程式の (1) と (2) が成立するためには、その進行方向と電場および磁場の方向が直交する必要があった。残りの方程式については、どうだろうか？

まずは、式 (3) を考える。この式の左辺は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E)] + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r} - \omega_B t + \theta_B)] \\ &\quad \text{ベクトル恒等式, } \nabla \times \phi \mathbf{A} = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi (\nabla \times \mathbf{A}) \text{ を使うと} \\ &= \nabla [\sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E)] \times \mathbf{E}_0 + \sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E) \nabla \times \mathbf{E}_0 - \omega_B \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r} - \omega_B t + \theta_B) \\ &\quad \mathbf{E}_0 \text{ は定ベクトルなので, } \nabla \times \mathbf{E}_0 \text{ はゼロである} \\ &= \mathbf{k}_E \times \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E) - \omega_B \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r} - \omega_B t + \theta_B) \end{aligned} \quad (30)$$

となる。これが、恒等的にゼロにならなくてはならない。常にそれが成り立つためには、

$$\mathbf{k}_E \times \mathbf{E}_0 - \omega_B \mathbf{B}_0 = 0 \quad \mathbf{k}_E = \mathbf{k}_B \quad \omega_E = \omega_B \quad \theta_E = \theta_B \quad (31)$$

となる必要がある。電場と磁場の波の周波数と波数、位相が等しいのである。さらに、電場と磁場、波の進む方向の3つは直交していることが分かる。以降、紙面の節約のために、 ω_E と ω_B は ω 、 $\mathbf{k}_E$ と $\mathbf{k}_B$ は $\mathbf{k}$ 、 θ_E と θ_B は θ と書く。

これまでの全ての議論から、

- 電場と磁場、波の進む方向は全て直交している。
- 電場と磁場は同じ振動数、同じ波数、同じ位相である。

ということがわかった。

残りは、マクスウェルの方程式の (4) である。この式を計算しやすくするために、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ を使って

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

と書き直しておく．この式は (4) とほとんど同じなので，電場や磁場の波の式を代入した結果は，

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_0) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta) = 0 \quad (33)$$

と直ちにわかる．これが常に成り立つためには

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (34)$$

である．やはり，電場と磁場，電場と波の方向は直交している．

これまでのところ，電場と磁場，波の進む方向がおのの直交しいれば，波の方程式 (10) と (26) は同時に成り立つことが分かった．条件は，それだけでよいのだろうか？ まだだめである．式 (31) と式 (34) が同時に成立する必要がある．これは，

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad (35)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_0 \quad (36)$$

と書き改められる．電場 $\mathbf{E}_0$ と磁場 $\mathbf{B}_0$ ，波の進む方向 $\mathbf{k}$ は全て直交しているので，この式が表すベクトルの大きさの関係は，

$$kE_0 = \omega B_0 \quad (37)$$

$$kB_0 = \frac{\omega}{c^2} E_0 \quad (38)$$

と容易に導くことができる．これから，直ちに

$$\frac{E_0}{B_0} = c \quad (39)$$

となる．真空中の電磁波は，電場と磁場の比がいつも一定なのである．

この式から， $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ の関係をつかって，

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{H_0} &= \mu_0 c \\ &= 376.73 \end{aligned} \quad (40)$$

と言う式が導かれる．技術者はこの関係を憶えている．この 376.7[Ω] を自由空間のインピーダンスと言う．電場 E の単位は [V/m]，磁場の強さ H の単位は [A/m] である．したがって， E_0/H_0 の単位は [V/A] すなわち [Ω] となる．

2.3 まとめ

色々と条件が出ていたので、ここでまとめておこう。自由空間における電場と磁場には、以下のような性質がある。

- 自由空間において、電場と磁場はそれぞれ独立した波動方程式で表現できる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (41)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (42)$$

- 上の波動方程式の解として、 $\mathbf{k}$ 方向に進む以下の電磁波が与えられる。(もちろん、 $\mathbf{E} = 0, \mathbf{B} = 0$ という解もありえる。)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r} - \omega_E t + \theta_E) \quad (43)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r} - \omega_B t + \theta_B) \quad (44)$$

これらはいずれも波面が進行方向に対し垂直であるので、平面波である。

- この電磁波が自由空間におけるマクスウェル方程式を満たしているならば、電磁波には以下の性質がある。
 - 電場と磁場は、進行方向に対し垂直であるので、いずれも横波である。
 - 電場と磁場、波の進む方向は全て直交している。 $(\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B})$
 - 電場と磁場は、同じ振動数、同じ波数、同じ位相である。
 - 電場と磁場の比は、常に一定である。

3 電磁波のエネルギー

ここで、求めた自由空間の電磁波のエネルギーについて考えてみよう。

3.1 ポインティングベクトル

まずは、ポインティングベクトルの復習である。ポインティングベクトルはエネルギーの流れの密度を表した。前回の講義と異なった方法で説明しよう。実際は同じことである。

が、簡単に説明する。ベクトル恒等式とマクスウェルの方程式から、

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \\
&= -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\
&= -\mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}
\end{aligned} \tag{45}$$

が得られる。これを任意の領域で体積積分を行う。左辺は、ガウスの定理により表面積分になるので、

$$\int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = 0 \tag{46}$$

が得られる。ここの左辺の第二項は単位時間あたりの電磁場のエネルギーの変化を表す。第三項の電流密度 $\mathbf{j}$ は $\rho \mathbf{v}$ となる。 $\rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ は、粒子が単位時間あたりに得るエネルギーである。したがって、第二項と第三項は体積 V 中の単位時間あたりのエネルギーの変化を表す。エネルギー保存則が成り立つとすれば、

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{47}$$

は単位時間、単位面積あたりのエネルギーの流れになるはずである。これは、発見者の名前をとってポインティングベクトルと呼ばれている。

ポインティングベクトルの次元を調べてみると、エネルギー密度の流れになっている。電場 E の単位は $[\text{V/m}]$ 、磁場の強さ H の単位は $[\text{A/m}]$ である。したがって、ポインティングベクトルの単位は $[\text{VA/m}^2]$ となり、 $[\text{W/m}^2] = [\text{J sec}^{-1} \text{m}^{-2}]$ と書き改めることができる。たしかに、エネルギー密度の流れになっている。

3.2 平面波のエネルギーのながれ

先ほど求めた電磁波のエネルギーの流れを考えてみよう。教科書 [1] の説明に沿って議論を進める。電磁波のエネルギーの密度 u については、これまでの講義で説明したように、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \\
&= \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B_0^2 \right] \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
\text{ここで, } B_0 &= E_0 / C = E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \text{ を用いて} \\
&= \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \right] \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
&= \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)
\end{aligned} \tag{48}$$

波の一周期 ($T = 2\pi/\omega$) の平均 $\bar{u}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \varepsilon_0 E_0^2 \times \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2\end{aligned}\tag{49}$$

となる. 一方, ポインティングベクトルからエネルギーの流れの大きさを計算すると,

$$\begin{aligned}|\mathbf{S}| &= |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \\ &= \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \\ &= c \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\end{aligned}\tag{50}$$

ここで c は波の速度であるので, この場合は 1 秒あたりの移動量である. 以上のように, ポインティングベクトルは電磁波の進行方向向きに, その方向に垂直な単位面積の断面を毎秒通過するエネルギー量を表していることになる.

参考文献

- [1] 砂川重信, “電磁気学の考え方” 岩波書店, 2001