

ベクトル場の演算（スカラー積とベクトル積）

生産システム工学専攻* 1年 電気磁気学特論
2015年4月21日(火)

概要

スカラー積とベクトル積を取り扱う。式の演算が確実にできることも重要であるが、ここで注目したいのは演算で得られるスカラーあるいはベクトルが意味する空間的イメージをしっかりと掴むことである。

1 ベクトルの内積 (スカラー積)

まずは、ベクトルの内積である。ベクトルの内積は、互いに角度 θ をなす二つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に関して、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1)$$

と定義されるスカラー量のことをいう。言葉のとおり、演算の結果得られるものは、スカラー量である。以降、内積のことを、スカラー積と呼ぶことにする。

1.1 内積の性質

ベクトルの大きさの計算と全く同じようにして、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のスカラー積は、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2)$$

のように書くことができる。すなわち、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (3)$$

である。以下で、この等式が正しいことを示そうと思う。ここで、 θ はベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間の角度である。これを証明するために、座標を回転させる。左辺はスカラー量である

*独立行政法人 国立高等専門学校機構 秋田工業高等専門学校 専攻科

ため、座標系を回転させても値は変わらない¹。座標回転後の新しい x 軸を $\mathbf{A}$ の方向にする。すると、ベクトル $\mathbf{B}$ と x 軸の間の角度は θ となる。 $\mathbf{B}$ と y, z 軸との角度を ζ, η とすると、新たな座標系でのベクトルの成分は、

$$A_x = |\mathbf{A}| \quad A_y = 0 \quad A_z = 0 \quad (4)$$

$$B_x = |\mathbf{B}| \cos \theta \quad B_y = |\mathbf{B}| \cos \zeta \quad B_z = |\mathbf{B}| \cos \eta \quad (5)$$

となる。 $\cos \theta, \cos \zeta, \cos \eta$ はそれぞれの軸との方向余弦である。従って、スカラー積の定義より、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

となる。これをスカラー積の第二の定義と考えることができる。実際には、式 (2) と式 (6) の簡単な方を使えば良い。また、スカラー積の定義から、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (7)$$

であることが直ちに分かる。この演算ではこのように交換法則が成り立っている。

最後に x, y, z 軸の単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ のスカラー積の演算を示しておこう。単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は互いに直交しているため、 $\cos$ の演算から以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

対角化された行列となる。

2 ベクトルの外積 (ベクトル積)

ベクトルの外積は、互いに角度 θ をなす二つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に関して、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の劣角² 対し、右ネジの法則の示す方向成分 $\mathbf{e}$ を用いて、以下のように定義される。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \mathbf{e} \quad (9)$$

演算の結果得られる量は、ベクトル量である。そのためベクトルの外積はベクトル積と呼ばれる。

¹練習問題

²二つのベクトルのなす角には、 $\theta < 180^\circ$ のものと、 $\theta > 180^\circ$ のものがあり、前者を劣角、後者を優角という。

2.1 ベクトル積の性質

角運動量やトルクなどを取り扱う場合に便利のようにベクトル積を定義する。それは、

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (10)$$

と書く。演算の結果の $\mathbf{C}$ はベクトルである。その大きさは、

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta \quad (11)$$

とする。ここで、 θ はそれぞれのベクトルの間の角度である。一方、その方向は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の定める平面に垂直で、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ が右手系³を作る向きとする。このように方向を定めると、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (12)$$

となる。積の順序を入れ替えると、符号が反対になるのである。内積の場合と異なり、かけ算の順序は重要となる。

次に、ベクトル積の幾何学的な意味を考えよう。式 (10) の演算は、図 1 のようになる。 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ で定まる平行四辺形の底面を $\mathbf{A}$ とすると、高さは $|\mathbf{B}| \sin \theta$ となる。従ってその面積は、 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta$ と直ちに分かる。これは、 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ に等しい。このことから、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ のベクトル積は、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ で定まる平行四辺形の面積を大きさとして、その平行四辺形の平面に垂直な方向のベクトルという幾何学的な意味があることが理解できる。

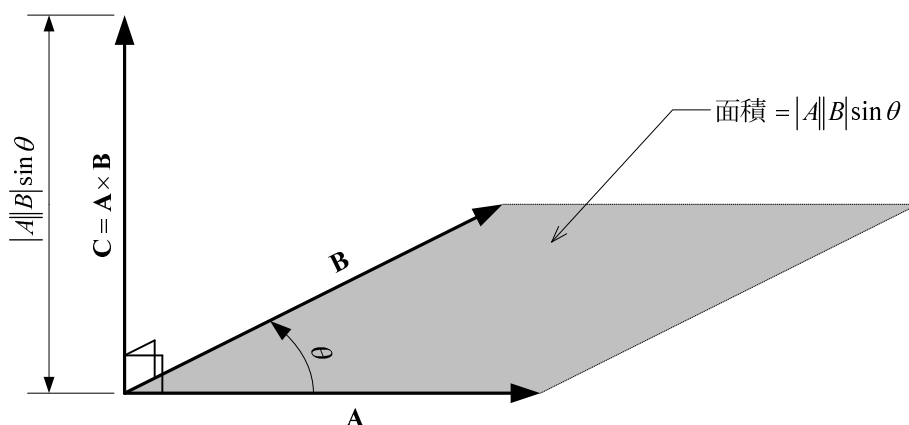


図 1: ベクトル積の幾何学的意味

定義から、単位ベクトル同士のベクトル積の演算は簡単に求めることができる。x, y, z 軸の単位ベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ の演算は、次のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= 0 & \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

³右ネジの法則を想像せよ

これは, $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i \dots$ のように巡回し, この方向にベクトル積をかける場合は正, 反対の場合は負と覚える.

これを使って, ベクトルの成分で考える. ベクトル $A = A_x i + A_y j + A_z k$ と $B = B_x i + B_y j + B_z k$ のベクトル積は,

$$\begin{aligned}
 C &= A \times B \\
 &= (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\
 &= A_x B_x (i \times i) + A_x B_y (i \times j) + A_x B_z (i \times k) + \\
 &\quad A_y B_x (j \times i) + A_y B_y (j \times j) + A_y B_z (j \times k) + \\
 &\quad A_z B_x (k \times i) + A_z B_y (k \times j) + A_z B_z (k \times k) + \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k
 \end{aligned} \tag{14}$$

となる. これから, ベクトル積の演算を成分で表すと

$$\begin{aligned}
 C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\
 C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\
 C_z &= A_x B_y - A_y B_x
 \end{aligned} \tag{15}$$

となる. この式は, 覚えにくいので, 行列式を用いて

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k
 \end{aligned} \tag{16}$$

と表すことがよくある. この行列式を用いた表現は便利なので憶えておく方が良いでしょう.

3 ベクトルの3重積

3つのベクトルの積の演算のうち, $A \cdot (B \times C)$ と $A \times (B \times C)$ は, 電磁気学では頻繁に登場する. 前者はスカラー3重積, 後者はベクトル3重積と呼ばれる. ここではこれらのベクトルの演算について述べる.

3.1 スカラー3重積の性質

$A \cdot (B \times C)$ の演算結果はスカラーになる. まず括弧内の外積 $B \times C$ はベクトルになり, それとベクトル A との内積はスカラーになるからである. そのため, スカラー3重積と呼ばれる.

スカラー3重積 $A \cdot (B \times C)$ は, 括弧を省いて, $A \cdot B \times C$ と書かれることもある. この場合でも, ベクトル積 $B \times C$ の演算を優先する. $A \cdot B$ の演算を先にすると, これがスカラーになり演算を続行することが不可能となるからである.

スカラー 3 重積の性質を直交座標系で確かめる．成分で表したスカラー 3 重積は，

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z - A_z B_y C_x \end{aligned} \quad (17)$$

となる．これは対称性の良い式である．各項はそれぞれのベクトルの成分を一つ含む．それを A, B, C の順序で並べると， (x, y, z) の巡回 に並んだとき正に，その逆の (z, y, x) の巡回 に並んだとき負になる．このことから，元の式 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ のベクトルは巡回に入れ替えても値は変わらないといえる．そして，逆に巡回させると符号が逆になることも分かる．すなわち，

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (18)$$

である．もっとも，負になる場合はベクトル積の入れ替えは負になることから分かる．これがスカラー 3 重積の最初の重要な性質である．

3.1.1 幾何学的なイメージ

つぎにこのスカラー 3 重積の幾何学的な意味を考える．図 2 に示すようにスカラー 3 重積の値は，3 つのベクトルが作る平行 6 面体の体積になる．ベクトル $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ が作る平行四辺形の面積 S は

$$S = |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| \quad (19)$$

となる．そして，この $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ が作る平行四辺形の対面との高さ h は

$$h = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|} \cdot \mathbf{A} \quad (20)$$

である．したがって，平行 6 面体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= Sh \\ &= |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (21)$$

となる．この式からわかるようにスカラー 3 重積は，それぞれのベクトルが作る並行 6 面体の体積になっている．ただし，スカラー 3 重積が負にもなるので注意が必要である．負の場合は，その絶対値が体積になる．

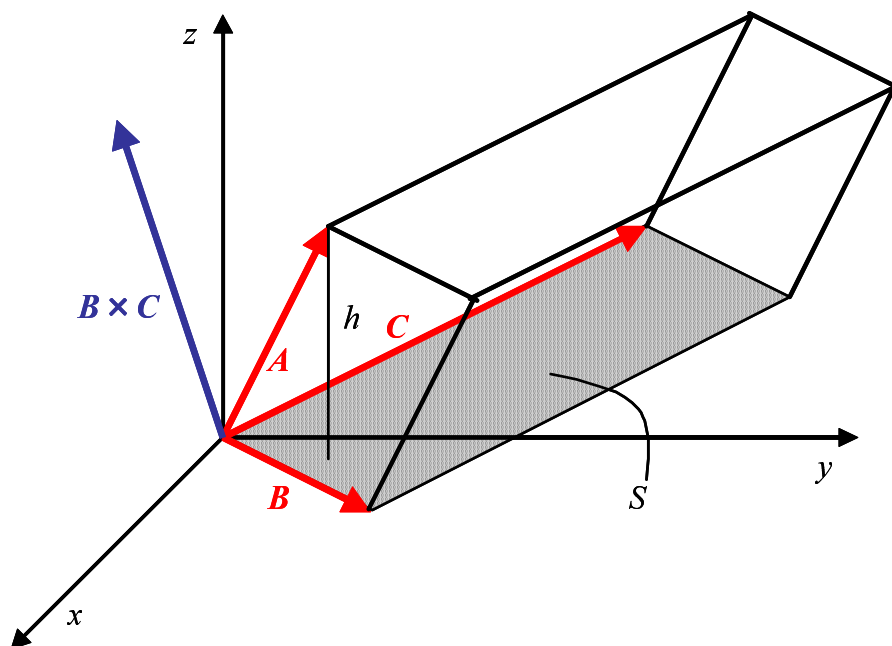


図 2: スカラー 3 重積の幾何学的意味. 3 つのベクトルが作る並行 6 面体の体積になる.

3.1.2 行列式との関係

もっと興味深いのは、行列式との関係である. 式 (17) から、スカラー 3 重積は行列式を用いて、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (22)$$

と書くことができる. これで、極めて見通しのよい式になった. これで、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を巡回に入れ替えても値が変わらないし、逆順だと負の符号がつくこともわかる.

一方、3 つのベクトルの体積になっていることも分かる. 行列式のイメージは体積だ! これは線形代数の基本である. これは 3 次元のみならず、2 次元—この場合は面積—でも、4 次元でも n 次元でも同じイメージである.

3.2 ベクトル 3 重積の性質

おそらく、電磁気学ではスカラー 3 重積よりもベクトル 3 重積の方が重要であろう. いろいろな場面でこのベクトル 3 重積

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (23)$$

が表れる。スカラー3重積の場合と異なり、括弧を省略してはならない。なぜならば、

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (24)$$

となるからである。これは単純な例を考えれば分かる。例えば、 $\mathbf{A} = \mathbf{i}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i}$, $\mathbf{C} = \mathbf{j}$ とすると、

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{j} \quad (25)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (26)$$

が得られる。明らかに、括弧の位置で演算結果が異なる。

ベクトル3重積の証明は練習問題とした。直交座標系で右辺と左辺の成分を計算して、等しいことを示せばよい。直交座標系で成り立てば、他の座標系でも同じように成り立つ。なぜならば、式(23)は、ベクトルなので座標系に依存しない量になっているはずであるからである。

ベクトル3重積について、簡単に幾何学的な考察を行う。ベクトル積 $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ の演算結果は、ベクトル $\mathbf{B}$ にも $\mathbf{C}$ にも垂直の方向を向いている。それと $\mathbf{A}$ とのベクトル積もまた垂直になる。これから、ベクトル3重積の $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ の方向について、次のことが言える。

- ベクトル $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ が作る平面内にある。
- ベクトル $\mathbf{A}$ と垂直である。

このうち、最初の結論は重要である。ベクトルの3重積は $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ の一時結合で表すことができると言っている! 式(23)は $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ の一次結合になっている。

4 ベクトルの積の重要公式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (27)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (28)$$

$$(\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\alpha \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (29)$$

$$\mathbf{A} \text{ と } \mathbf{B} \text{ が垂直ならば, } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{A} \text{ と } \mathbf{B} \text{ が並行ならば, } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (30)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (31)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (32)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (33)$$

5 問題

[問 1] スカラー積の演算を利用して，余弦定理を導きなさい．ヒント：図 3.

[問 2] ベクトル積の演算を利用して，正弦定理を導きなさい．ヒント：図 3.

[問 3] xy 平面上の 3 点 $(1, 2), (5, 8), (4, -3)$ を頂点とする三角形の面積を求めなさい．

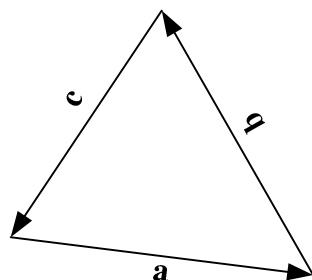


図 3: 三角形をベクトルで表す.

6 次回演習問題

今回はスカラー場とベクトル場の微分を取扱う．特に勾配，発散，回転の演算ができるようになることを目標とする．

[問 1] $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とし，以下を確認しなさい．

(a) $\nabla(\log r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

(c) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$

(d) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

(e) $\nabla \times (r^n \mathbf{r}) = 0$

(f) $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$

[問 2] 次のベクトル場を図示すると，図 4～9 のどれに対応するか? ただし，分

かりやすくするために、ベクトルの大きさは規格化されている.

$$(a) \quad \mathbf{A} = \left(0, \frac{1}{1+x^2}, 0 \right)$$

$$(b) \quad \mathbf{A} = (x, y, 0)$$

$$(c) \quad \mathbf{A} = (y, x, 0)$$

$$(d) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} (y, -x, 0)$$

$$(e) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{r} (y, -x, 0)$$

$$(f) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{r} (-x-y, x-y, 0)$$

[問 3] 図 4~9 のうち、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ あるいは $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ のものはどれか? まずは、計算をしないで考えなさい. その後、計算を行い確認しなさい.

参考文献

[1] 和達三樹, “物理のための数学” 岩波書店, 2002

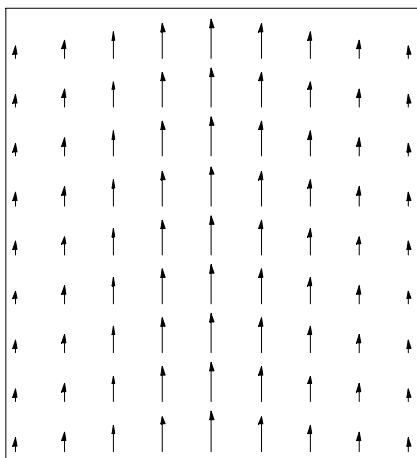


图 4:

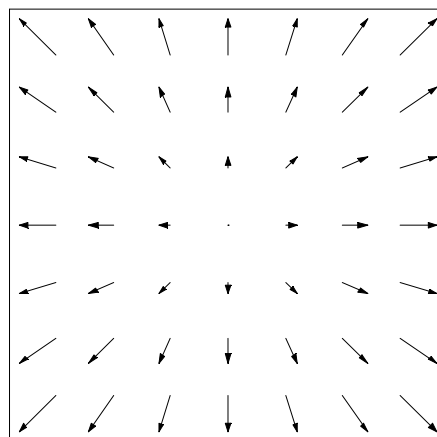


图 5:

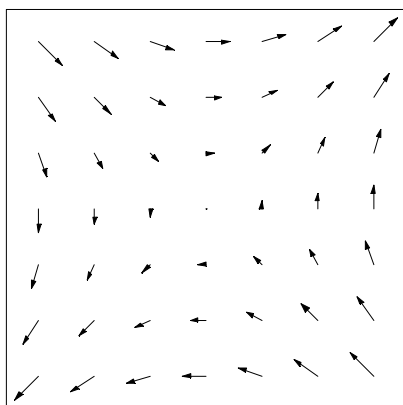


图 6:

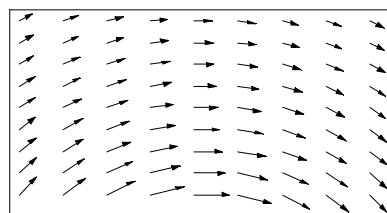


图 7:

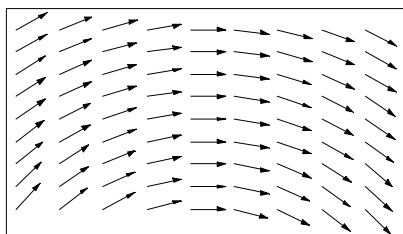


图 8:

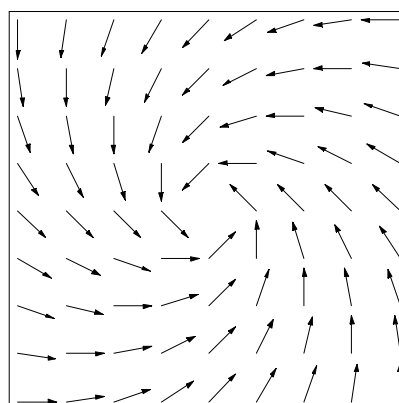


图 9: