ベクトル場の演算
(スカラー場とベクトル場の微分)

生産システム工学専攻* 1 年　前期　電気磁気学特論
2015 年 4 月 28 日 (火)

概 要

スカラー場とベクトル場の微分について説明する．スカラー場の勾配から，ナブラ演算子 (∇) を導出し，それがベクトルのように振る舞うことを示す．ベクトル演算子とベクトル場の演算から，発散と回転を導く．さらに，ベクトル場の 2 階微分を示す．この内容は，参考文献 [1] に沿って話を進める．この本はとても面白い本なので，一読することを勧める．

1　スカラー場とベクトル場

この講義で，は以下に示すように，スカラー場とベクトル場の微分の演算の学習を行う．

- ベクトル場とスカラー場（復習）
- スカラー場の勾配
- ベクトル演算子 ∇
- ベクトル場の発散（物理的意味は来週）
- ベクトル場の回転（物理的意味は来週）
- スカラー場とベクトル場の 2 階微分
- ラプラス演算子

場とは，空間の点に依存する量のことである．この量がスカラーのものをスカラー場，ベクトルのものをベクトル場と言う．空間の位置が決まればスカラーあるいはベクトルの値がきまると言うことで位置の関数であるが，時間の関数であっても良い．今のところ，時間の部分は気にしないで，位置との関係を見ていく．現実の世界では，次のような量である．

*独立行政法人　国立高等専門学校機構　秋田工業高等専門学校　専攻科

スカラー場　：空間の各点に一つの数（量，スカラー）が決められている場
例：空間の温度分布，密度分布，重力ポテンシャル，電磁気のスカラーポテンシャル

ベクトル場　：空間の各点に一つのベクトルが決まっている場
例：流体の速度分布，電場，磁場

これらの量は，位置の関数で連続的に変化する．通常の物理の問題のように，不連続な変化は考えないことにする．連続的になめらかに変化するので，微分が決められる．本日は，このベクトル場とスカラー場の空間微分について，考える．

2　スカラー場の微分：勾配 (grad)

場が時間と共に変化するとき，その変化は時刻 t に関する微分によって記述することができる．これと同じように，場所と共に変わる変化も記述しようと思う．何故かというと，例えばスカラー量である温度を考えた時，ある点とその近所の温度の関係に興味を持つからである．この関係を記述する時，時間と同じように場所に関して温度を微分するにはどうしたらよいか．x について微分するのか，それとも，y なのか z なのか．

ひとまず，場所について x についての微分

$$\frac{\partial T}{\partial x} \tag{1}$$

を考えてみる．これは，座標軸の取り方に依存してる．x 軸が違う方向を向いてしまった場合，この値は変化してしまう．従って，スカラー量ではないし [1]，ベクトル量でもない [2]．スカラー量でもベクトル量でも無いものは，座標軸を変えると式が変わってしまい，物理的な考察をするときには役に立たない．

しかしながら，３つの微分，$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$ が可能であることに注目する．ここに 3 次元空間における 3 つの微分がある，そして 1 つのベクトルを作るには，3 つの数が必要だから，恐らくこの 3 つの微分は 1 つのベクトルの成分であることが予想される．そこで，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2}$$

について少し詳しく考えてみることにする．この勾配には 3 つの成分があり，ベクトル量になっている．それぞれは位置の関数であるので，場の量; ベクトル場であることは確かである．また，T はなめらか（連続）な関数なので，この 3 成分もなめらかに変化するのも確かである．　あとは，この 3 成分がベクトル量であることを確認すれば良い．次のように，回転による座標変換を行って，ベクトルであるか否かを確かめる．

[1] スカラー量は座標軸を回転させても変化しない量である．
[2] 3 次元空間であれば少なくとも 3 つの量が必要である．

3 次元は大変なので 2 次元の場合で説明するが，3 次元に拡張しても同じことが言える．元の座標を (x, y, z)，それを θ 回転させた座標を (x', y', z') とした場合，それらには，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{あるいは} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{3}$$

という関係がある．変位ベクトル $(\Delta x, \Delta y)$ も同じ変換なので，

$$\Delta x' = \Delta x \cos\theta + \Delta y \sin\theta \tag{4}$$

$$\Delta y' = -\Delta x \sin\theta + \Delta y \cos\theta \tag{5}$$

となる．2 点間の距離 $(\Delta x, \Delta x')$ を無限小にとった場合の温度差をプライムが付いた座標系で考える．温度変化は，

$$\begin{aligned}
\Delta T &= T(x' + \Delta x',\, y' + \Delta y') - T(x',\, y') \\
&= \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y' \\
&= \frac{\partial T}{\partial x'} (\Delta x \cos\theta + \Delta y \sin\theta) + \frac{\partial T}{\partial y'} (-\Delta x \sin\theta + \Delta y \cos\theta) \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin\theta \right) \Delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \sin\theta + \frac{\partial T}{\partial y'} \cos\theta \right) \Delta y \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin\theta,\; \frac{\partial T}{\partial x'} \sin\theta + \frac{\partial T}{\partial y'} \cos\theta \right) \cdot (\Delta x,\, \Delta y)
\end{aligned} \tag{6}$$

となる．また，演算を進めると，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x'} \\ \frac{\partial T}{\partial y'} \end{bmatrix} \tag{7}$$

となることがわかる．これを見て分かるように，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{8}$$

という量は，座標軸の回転に対して，座標が受けるのと同じ変換を受ける．従って，ベクトル量である．これをスカラー場 T の勾配と言い，$\mathrm{grad}\, T$ と書いたりもする．3 次元表現でまとめると，

$$\nabla T = \mathrm{grad}\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \tag{9}$$

である．これは一体なんなのか？勾配と名がつく通り，ある空間（場）における，スカラーの変化量を示すものである．

3　∇（ナブラ）演算子

ここでは，∇ が演算子であり，ベクトルのような振る舞いを示すこと説明する．式 (7) から，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta, \frac{\partial T}{\partial x'}\sin\theta + \frac{\partial T}{\partial y'}\cos\theta\right) \tag{10}$$

である．これを，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)T = \left(\frac{\partial}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial y'}\sin\theta, \frac{\partial}{\partial x'}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial y'}\cos\theta\right)T \tag{11}$$

と書き改めても良いだろう．従って，$(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ は演算子になっている．さらに，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{bmatrix} \tag{12}$$

の関係より，ベクトルのように振る舞うことが分かるだろう．

∇ を独立したベクトル演算子と考えると都合がよい．どのように都合が良いかは後で述べる．勾配を表す式 (9) では ∇T で一つの記号であったが，今後はベクトル演算子 ∇ スカラー場 T との積と考える．すなわち，

$$\begin{aligned} \nabla T &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)T \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

である．ベクトル演算子 ∇ は右側にある量に作用することを忘れてはならない．従って，積の交換法則は成り立たず，$\nabla T \neq T\nabla$ である．

また，これは微分を表すことも忘れてはならない．微分演算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ のようにである．このベクトル演算子はは当然スカラー場やベクトル量に作用する．

ベクトル演算子はベクトル量とスカラー積やベクトル積をとることができる．それについては，次節以降に述べる．

4　ベクトル場の発散（Divergence）

ベクトル演算子 ∇ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ とのスカラー積を考えることができるだろう．これは，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x, A_y, A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{14}$$

となる．これは，発散と呼ばれるスカラー場である．ベクトル演算子とベクトル場のスカラー積なので，スカラー量になると覚える．実際に，スカラー量になることの証明は，諸君に任せる．

この量の物理的意味は，来週の積分の演算を通して示す．

5　ベクトル場の回転（Rotation, Curl）

次にベクトル演算子 ∇ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ とのベクトル積を考える．これは,

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \boldsymbol{A} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{15}
$$

となる．これは，回転と呼ばれるスカラー場である．ベクトル演算子とベクトル場のベクトル積なので，ベクトル量になると覚える．これが，実際にベクトル量になることの証明は，諸君に任せる．

この量の物理的意味は，来週の積分の演算を通して示す．

6　スカラー場とベクトル場の 2 階微分

ほとんどの物理法則は，1 階あるいは 2 階の微分方程式で書かれる．3 階の微分方程式なんかお目にかかったことはないし，5 階や 23 階とかも無い．実に不思議なことである．ここでは，ベクトル演算子を使ったスカラー場とベクトル場の 2 階微分を考える．

6.1　ベクトル恒等式

ベクトル演算子を使った 1 階微分は先ほど示したとおりである．2 階微分もしばしば現れるので，それを示しておく．先程述べたようにベクトル演算子も，ベクトルと同じように振る舞う．そこで，ベクトルに関する式を先に示しておいた方が良いだろう．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ をベクトルとして，重要なベクトル恒等式は,

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{17}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{19}$$

である．

6.2 2 階微分

スカラー場を ϕ，ベクトル場を $\boldsymbol{h}$ とした場合，ベクトル演算子を使った 2 階微分の可能な組み合わせは，次の通りである．

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) \tag{20}$$
$$\nabla \times (\nabla \phi) \tag{21}$$
$$\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{h}) \tag{22}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{h}) \tag{23}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) \tag{24}$$

これら，全ての組み合わせについて，どうなるか考えよう．

まずは，通常のベクトルの演算で 0 になるものを探し，その関係を利用して式 (20)〜(24) の演算で 0 になるものを類推する．以下のベクトルの演算が 0 になることは直ちに分かる．

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{A}\phi) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A})\phi = 0, \qquad \text{式 (16) より} \tag{25}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0, \qquad \text{式 (17) そのもの} \tag{26}$$

これらの関係から，$\boldsymbol{A}$ を ∇，$\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{h}$ とすると

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \tag{27}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{h}) = 0 \tag{28}$$

と類推できる．類推ではあるが，これは正しい式である．

次にベクトル公式

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{29}$$

を用いた場合を考える．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を ∇ で置き換え，$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{h}$ とすると，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{h}(\nabla \cdot \nabla) \tag{30}$$

となる．右辺第 2 項の $\boldsymbol{h}(\nabla \cdot \nabla)$ が変である．この困難を避けるために，少し技巧的であるが，式 (29) を

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{31}$$

とすればよい．右辺第 2 項は，ベクトル $\boldsymbol{C}$ とスカラー $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ との積であるため，演算の順序を入れ替えても良い．こうすると，式 (30) は

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{h} \quad = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - \nabla^2 \boldsymbol{h} \tag{32}$$

となり，正しそうである．事実，これは正しい式である．成分ごとに，きちんと微分を行えば分かる．

以上で，最初に示した 2 階の微分のうち，式 (21) と (23)，(24) の公式を導いた．残りは，特に興味のあるものは無い．そこで，以上の結果をまとめると

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \text{スカラー場} \tag{33}$$
$$\nabla\times(\nabla\phi) = 0 \tag{34}$$
$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{h}) = \text{ベクトル場} \tag{35}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{h}) = 0 \tag{36}$$
$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{h}) - \nabla^2\boldsymbol{h} = \text{ベクトル場} \tag{37}$$

となる．

ここで，∇^2 という演算子が現れている．これは，ラプラス演算子と言われるもので，いろいろな場面で活躍する．これについては，後でのべる．

これまでの話をまとめると，ベクトル演算子 ∇ は通常のベクトルの演算規則が成り立ち，便利である．

6.3 落とし穴

先ほど，ベクトル演算子 ∇ は通常のベクトル演算と同様に扱えると述べたが，注意が必要である．例えば，通常のベクトル公式

$$(\boldsymbol{A}\psi)\times(\boldsymbol{A}\phi) = 0 \tag{38}$$

である．これが 0 になるのは，図をイメージすればわかるだろう．もし，$\boldsymbol{A}$ を ∇ と置き換えると

$$(\nabla\psi)\times(\nabla\phi) = 0 \quad \text{常には成り立たない!!!!!} \tag{39}$$

となる．ベクトル $\nabla\psi$ の方向は ψ に関係するし，$\nabla\phi$ も同様である．したがって，0 になるのは特殊な場合である．

これは，次のように考える．最初の ∇ は ψ に作用し，つぎのものは ϕ に作用する．したがって，同じ ∇ でも異なるベクトルと考える．

だからと言って，$\nabla\times\nabla\phi = 0$ が成り立たないというわけではない．この場合，2 つの ∇ は同じ ϕ に作用する．

ベクトル演算子 ∇ を $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ としてスカラー積やベクトル積を計算して，勾配や発散，回転を計算できるのは，直交座標系のみである．他の座標系（円筒座標や極座標）になると，かなり複雑になる．これらは，付録にまとめたので，参照してほしい．

7　ラプラス演算子

7.1　スカラーラプラス演算子

式 (33) の ∇^2 を考える．これは，

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \nabla\cdot(\nabla\phi) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi
\end{aligned}
\tag{40}
$$

となる．したがって，演算子 ∇^2 は

$$
\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{41}
$$

である．この新しい演算子をラプラス演算子 (ラプラシアン) と言う．∇^2 の代わりに Δ と書くこともある．

これは，あたかもベクトル演算子同士の内積をとった結果，

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla &= \nabla^2 \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

のように見える．これが成り立つのは，直交座標系のみである．円筒座標や極座標では，非常に複雑になってくる．

これは，見て分かるようにスカラー演算子である．スカラー演算子であるため，スカラーやベクトルに作用することができる．スカラー場 ϕ に作用すると，次のようなスカラー場ができる．

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi \\
&= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

このように単純に計算できるのは直交座標系の場合に限られる．ほかの曲線座標系のラプラス演算子は複雑である．これらについては，付録にまとめた．

7.2　ベクトルラプラス演算子

ラプラス演算子がベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に作用すると，次のようなベクトル場ができる．

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right)\left(A_x,\ A_y,\ A_z\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

直交座標系のみ，このような単純なことが言え，偶然の産物に過ぎない．実際に，ベクトル場に作用するベクトル演算子—ベクトルラプラシアン—は，ベクトル解析の恒等式

$$
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{45}
$$

から導くべきである．この式の右辺第 2 項がベクトルラプラス演算子 (ベクトルラプラシアン) である．従って，ベクトルラプラス演算子は，

$$
\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{46}
$$

から計算できる．右辺は，勾配と発散，回転からなる．

直交座標系の x 方向成分は，次のように地道に計算すれば求めることができる．

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right)_x &= (\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A})_x - (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A})_x \\
&= \left\{\nabla\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right\}_x \\
&\qquad - \left\{\nabla \times \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\right\}_x \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\
&= \nabla^2 A_x
\end{aligned}
\tag{47}
$$

直交座標系は，すべての軸が同じ形をしている．従って，他の軸のベクトルラプラス演算子は，$x \to y \to z$ とサイクリックに記号を入れ替えることにより容易に求められる．まとめると，直交座標系のベクトルラプラス演算子は，

$$
\begin{cases}
\left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right)_x = \nabla^2 A_x \\
\left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right)_y = \nabla^2 A_y \\
\left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right)_z = \nabla^2 A_z
\end{cases}
\tag{48}
$$

となる．実に，単純である．円筒座標や極座標系のラプラス演算子は非常に複雑である．

8　演習問題

[問 1] $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とし，以下を確認せよ．

$$(a)\quad \nabla(\log r) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

$$(b)\quad \nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$$

$$(c)\quad \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 0$$

$$(d)\quad \nabla \times \boldsymbol{r} = 0$$

$$(e)\quad \nabla \times (r^n \boldsymbol{r}) = 0$$

$$(f)\quad \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

[問 2] 次のベクトル場を図示すると，図 1〜6 のどれに対応するか? ただし，分かりやすくするために，ベクトルの大きさはスケールされている．

$$(a)\quad \boldsymbol{A} = \left(0,\ \frac{1}{1+x^2},\ 0\right)$$

$$(b)\quad \boldsymbol{A} = (x,\ y,\ 0)$$

$$(c)\quad \boldsymbol{A} = (y,\ x,\ 0)$$

$$(d)\quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}(y,\ -x,\ 0)$$

$$(e)\quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}(y,\ -x,\ 0)$$

$$(f)\quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}(-x-y,\ x-y,\ 0)$$

[問 3] 図 1〜6 のうち，$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ あるは $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ のものはどれか? まずは，計算をしないで考えよ．その後，計算を行い確認せよ．

9　次回演習問題

次回は，勾配，発散，回転の積分を考え，これらの演算が意味するところを考えてみる．

[問 1] スカラー場 $f = x^2 + y^2 + z^2$ に対して，勾配を求めなさい [3].

[問 2] ガウスの定理を証明しなさい．

[問 3] ストークスの定理を証明しなさい．

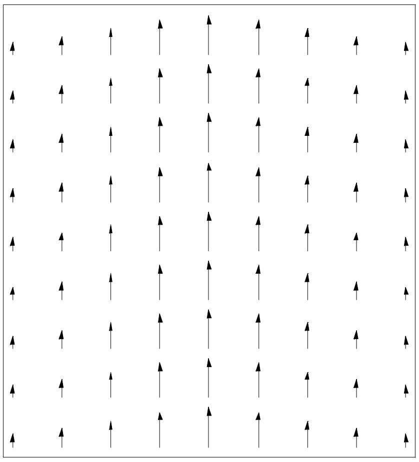

図 1:

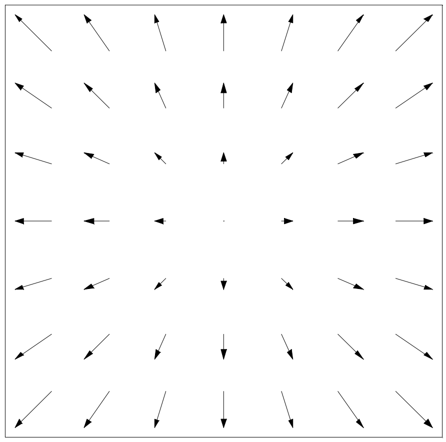

図 2:

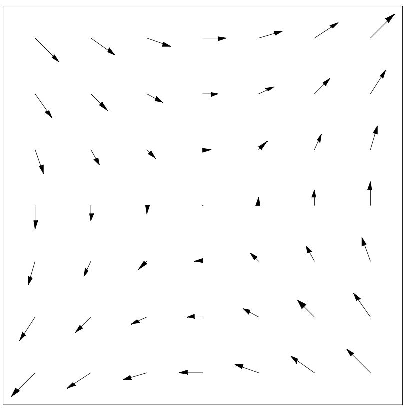

図 3:

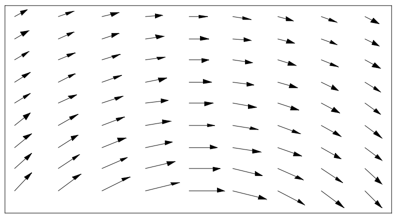

図 4:

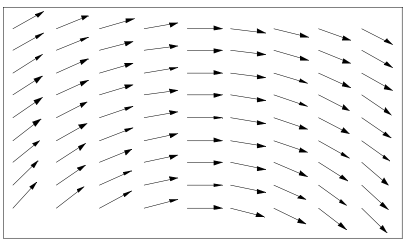

図 5:

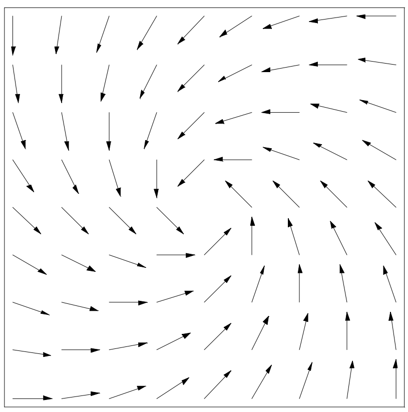

図 6:

付録 A　直交座標系，円筒座標系，極座標系における演算子

ここでは，直交座標系，円筒座標系，極座標系における演算子をまとめる．これらは，丸暗記するのは大変だし，物理学は暗記する学問ではない．それゆえ，問題を解く上で必要となったときに，それらを参照すれば良いと私は考える．問題を数多く解けば，自ずと頭の中に刻み込まれる．それまでは参照できる書物を手元に置いておくことが望ましい．私の場合は，J. D. Jackson の Classical Electrodynamics [2] をいつも参照している．これは非常に良い教科書なので，一読の価値はある（但し，この教科書は非常に高価だ）．

直交座標系 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{49}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{50}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{51}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

円筒座標系 $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{z})$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{54}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_x) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_y}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{55}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e_y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_y) - \frac{\partial A_x}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e_z} \tag{56}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

極座標系 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e_x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e_y} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\boldsymbol{e_z} \tag{59}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_x) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_y) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} \tag{60}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_z) - \frac{\partial A_y}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{e_x} \tag{61}$$

$$+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_x}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_z)\right]\boldsymbol{e_y} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_y) - \frac{\partial A_x}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e_z} \tag{62}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{63}$$

$$\tag{64}$$

参考文献

[1] Richard P. Feynman, “ファインマン物理学 3” 岩波書店，1983

[2] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics, Third Edition” John Wiley & Sons, Inc., 2001

[3] 丸山武男，石川望，“要点からわかるベクトル解析” コロナ社