ベクトル場の演算
(スカラー場とベクトル場の積分)

生産システム工学専攻[*] 1 年　電気磁気学特論
2015 年 5 月 8 日 (金)

概 要

スカラー場とベクトル場の勾配と発散，回転の意味を，これらの積分を行うことで考えてみる．これらをとおして，ガウスの発散定理とストークスの定理を理解し，使いこなせるようになることを目標とする．

1　微分と積分のおさらい

1.1　微分

普通の滑らかな関数 $f(x)$ の微分 (導関数) を考える．これは,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

となる．関数の変化量を変数の変化量で割ったものの極限を微分という．

1.2　積分

次に，積分の重要な定理を示しておく．微分したもの（導関数）を積分すると,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \tag{2}$$

となる．この式は,

- 微分した関数を積分した量は，関数の両端の値で決まる．

ということを示している．図 2 に示すように，途中の関数がどうであろうと，両端の値で決まるのである．

[*]独立行政法人　国立高等専門学校機構　秋田工業高等専門学校　専攻科

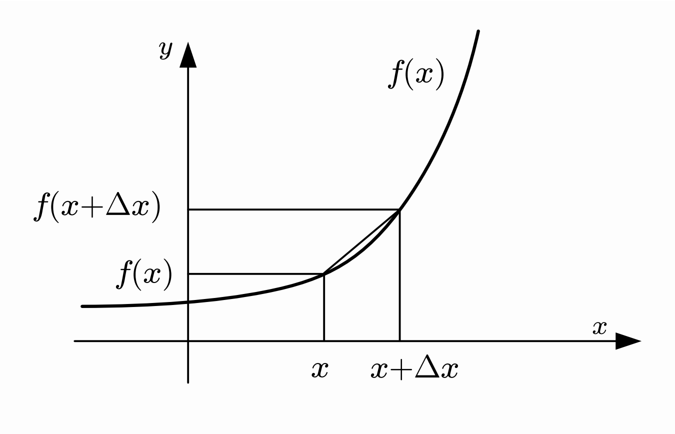

図 1: 普通の関数の微分

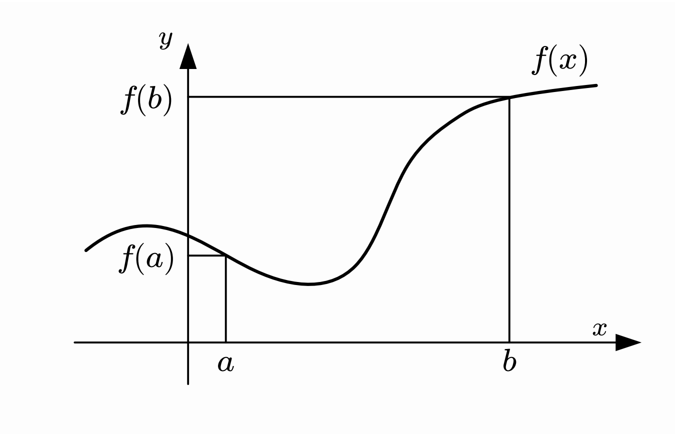

図 2: $f'(x)$ の積分の量は，積分区間の両端の値 $f(a)$ と $f(b)$ のみに依存する．途中の値に関係しない．

2　スカラー場の勾配とその積分

2.1　勾配って，何?

2 次元直交座標系のスカラー場として，山の高さ h を考える（3 次元でも全く同じ考え方であるが，簡単のためイメージの持ち易い 2 次元で考える）．これは，位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y)$ の関数で $h(\boldsymbol{r})$ あるいは $h(x, y)$ と書くことができる．

ここで，d$\boldsymbol{r}$ だけ異なる位置の山の高さの差 dh を考える．これは，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= h(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - h(\boldsymbol{r}) \\
&= h(x + \mathrm{d}x,\ y + \mathrm{d}y) - h(x,\ y) \\
&\qquad (x,\ y) \text{ の周りでテーラー展開して，1 次の項のみをとると} \\
&= h(x,\ y) + \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y - h(x,\ y) \\
&= \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となる．最後の式は全微分の式そのものなので，いきなりこれを書いても良い．ここでは，山の高さの差が分かりやすいように，テーラー展開を用いて示しただけである．ところでこの式は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y}\right) \cdot (\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y) \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right) h\right] \cdot (\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y) \\
&= (\nabla h) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&\qquad \text{括弧が無くても微分の順序は間違うことはないので} \\
&= \nabla h \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

と書くことができる．最後の式がベクトルで表した山の高さの差となっている．

前回示したように，∇h は h の勾配と呼ばれるベクトル量である．むろん，変位 d$\boldsymbol{r}$ はベクトル量である．そしてこれらのベクトル量のスカラー積は，2 点間の山の高さの差 dh を表し，それは明らかにスカラー量となる．山を歩いていて，d$\boldsymbol{r}$ 移動すると，dh 標高が変化するということを表している．ただし，式 (4) は，d$\boldsymbol{r}$ がゼロの極限のみで正しい．

ここで勾配 ∇h の意味を考えてみようと思う．なぜなら，勾配 ∇h はベクトル量なので方向と大きさを持っているはずなので，その方向はどっちを向いているのか?その大きさは?— ということが重要だからである．それを考えるために，式 (4) を

$$
\mathrm{d}h = |\nabla h||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta \tag{5}
$$

と書き換える．ここで，θ は 2 つのベクトルの間の角度である．勾配は場の量として決まっているが，変位 d$\boldsymbol{r}$ は任意にとる事ができる．注目したいのは，同じだけ歩いてもっとも高く登れるのは，2 つのベクトルが同じ方向を向いている場合である．

ここで，勾配 ∇h の方向が定義される．勾配の向きとは，スカラー場の変化が最も大きい方向である．登山に言い換えれば，一歩を踏み出したとき，最も坂道のきつい方向が勾配 ∇h の方向となるのである．

スカラー場を等高線で表すと，勾配は等高線と垂直方向に向いている．なぜならば，その方向が最も高さ変化が大きい方向となっているからである．式 (5) から，勾配の大きさはスカラー場の変化の割合を表していることがわかる．高さの変化の割合（山の傾斜）が勾配の大きさである．したがって，等高線の密度が詰まっているときに勾配は大きくなる．まとめると，

- 勾配 ∇h の方向:変化量が一番大きい方向（等高線に対し直角）
- 勾配 ∇h の大きさ:傾斜の大きさ

2.2　勾配の積分

式 (2) のように，微分したものの積分を考える．

スカラー場の勾配の積分を考えるために，2 つの場所 $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ の標高差を計算してみる．結論を先に言うと，これは勾配の積分として

$$h(\boldsymbol{r}_2) - h(\boldsymbol{r}_1) = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \nabla h \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{6}$$

のように表すことができる．

これが本当に正しいことを確かめるために，積分の意味を再び考える．元々積分は，値とその微小量をかけて足しあわせる演算であり，以下のように書ける．

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \nabla h \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_i \nabla h_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i \tag{7}$$

これは，図 3 のように表せる．積分経路を分割して，それぞれの場所での勾配と変位の内積を計算して足しあわせる．そして，変位を無限小にした場合の和が積分である．

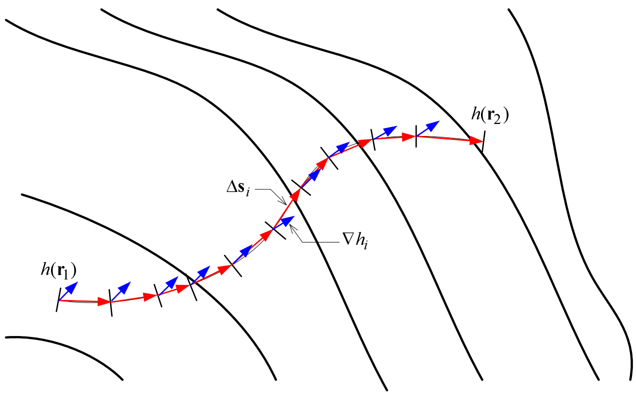

図 3: 積分を和として表す

次に，式 (7) の和を考える．微小量の内積を図 4 に示す．これは，式 (4) から，

$$\nabla h_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i = h_{i+1} - h_i \tag{8}$$

となる．積分路を N 分割したとして，それを足しあわせると，

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla h_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i = h_{N+1} - h_1 \tag{9}$$

となる．ここで，$\Delta \boldsymbol{s}_i$ をゼロに近づけた極限では，h_1 は $h(\boldsymbol{r}_1)$ で，h_{N+1} は $h(\boldsymbol{r}_2)$ である．従って，式 (6) が証明できた．

ここまでの議論をまとめると，

- 勾配の積分:スカラー場の差（標高差）

である．

これも 2 次元で考えたが，3 次元に拡張しても一般的に成り立つ．ϕ を 3 次元のスカラー場とすると，

$$\phi(\boldsymbol{r}_2) - \phi(\boldsymbol{r}_1) = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{10}$$

である．スカラー場の差は，勾配を積分すれば得られるのである．

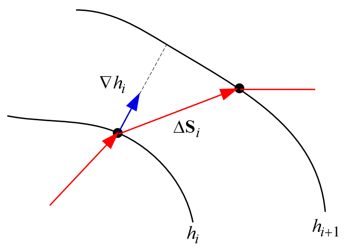

図 4: 微小領域の積分

3　ベクトル場の発散とその積分

3.1　発散って，何?

この場合は，2 次元で考えるのはやっかいなので 3 次元で考えることにする．3 次元の閉じた空間内での熱の流れを考える．単位面積，単位時間あたりの熱の流れ [Jule/(m^{2}sec)] はベクトル場である．これを $\boldsymbol{A}$ で表すことにする．ここでは，この空間から出入りする熱量の総和を考える．この閉じた空間の表面の微小面積 dS から出ていく熱量 dQ は，

$$\mathrm{d}Q = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{11}$$

である．ここで，$\boldsymbol{n}$ は図 5 この微少面積の法線方向の単位ベクトルである．この熱の流れのベクトルと面積の内積を熱流束 (一般にはフラックス) と言う．この式から，空間から出入りするトータルの熱量は，

$$Q = \int_V \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{12}$$

となる．

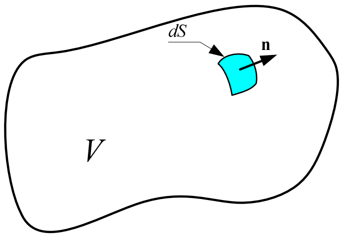

図 5: 熱の流出を考える空間とその表面

次に，先ほどの空間を図 6 のように V_1 と V_2 の 2 つの部分に分割した場合を考える．この場合，閉じた空間からの熱量の出入りの総和は，それぞれの部分の熱流速を足しあわせれば良い．すなわち

$$Q = \int_{V_1} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \int_{V_2} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{13}$$

である．先ほどの式 (12) と同じになる理由は，以下のことから分かる．

- V と積分が異なるのは，図 6 の S' の部分である．この部分では，V_1 と V_2 での熱の流れのベクトルは同一である．しかし，積分をする場合の法線の方向が反対で，$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ の関係がある．すると，この部分での積分は，V_1 と V_2 を足しあわせるとキャンセルされる．

先ほどは 2 つに分割したが，この分割方法は任意で 2 つ以上に分割しても良いことは明らかである．図 7 のように N 個に分割した場合は，

$$Q = \sum_i \int_{\Delta V_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_i \mathrm{d}S \tag{14}$$

である．これを非常に大きな数で分割して，$\Delta V_i \to 0$ の極限を考える．すると，

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i \int_{\Delta V_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_i \mathrm{d}S \\ &= \sum_i \left[\frac{\int_{\Delta V_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_i \mathrm{d}S}{\Delta V_i} \right] \Delta V_i \\ &= \int_V \left[\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S}{\Delta V} \right] \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{15}$$

である．ここで，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S}{\Delta V} \tag{16}$$

とする．先週示した $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ という微分がいきなり現れているが，この右辺と等しいことは練習問題とした．ちょっと難しいかもしれないが，挑戦してみて欲しい．式 (16) の右辺が発散と呼ばれるスカラー量で，ベクトル場の微分を表す．これが微分になっていることの感触は，式 (1) から汲み取ってほしい．

この発散を用いると，トータルの熱量は，

$$Q = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{17}$$

となる．式 (12) と比べると，

$$\int_V \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{18}$$

である．これをガウスの発散定理といい，熱にこだわらずどんなベクトル場についても成り立つ．この定理は,「微分の体積積分は表面での面積分に置き換えることができる」と言っている．式 (2) のように，微分したものの積分の値は端—ここでは表面—で決まるのである．

ここで考えた熱流速の場合，発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ は単位体積あたりの熱の出入りを表している．これは，その微少体積で熱が発生量を表している．そのため，発散とは言わずにこの微分を「湧き出し」と呼ぶ人もいる．

ここで改めて，発散の物理的意味をまとめておく．それは，

- $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ は単位体積あたりの熱（ベクトル場）の出入りを表す．

である．

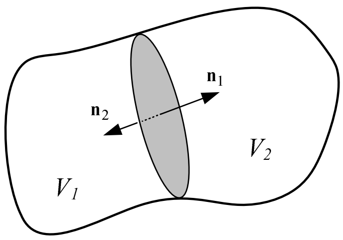

図 6: 2 分割

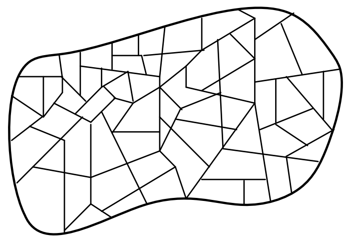

図 7: 微小な区間に分割

4　ベクトル場の回転とその積分

4.1　回転って，何?

回転についても，発散と全く同じように議論を進める．回転のイメージを持つためには，流体を考えるのが都合が良い．つまり，速度場を考えてみる．速度なのでこれは，ベクトル場である．それが回転しているか否かを考えることにする．速度場のベクトルを $\boldsymbol{A}$ で表し，回転 Ω を

$$\Omega = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{19}$$

と定義する．この積分は図 8 のように，ベクトル場を線積分する．ぐるっと一周して，そこの値がゼロとなっていれば回転が無いというのは，直感的には理解できる．閉じた紐を流れのある流体に入れて，それが回転するか否か—を言っているのでる．

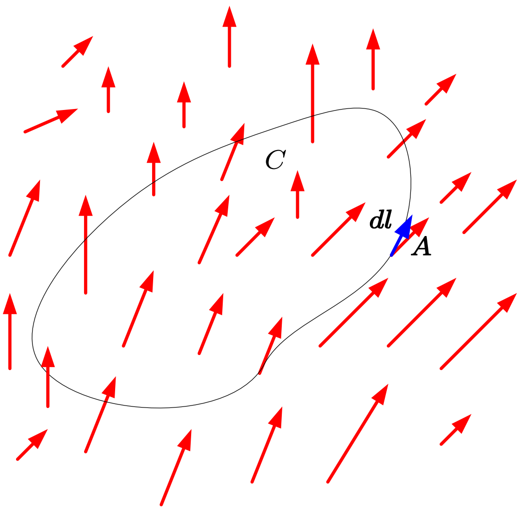

図 8: 流体の速度場と回転を計算する経路

この積分は，図 9 のように，2 つに分割しても値は変わらない．

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell_1} + \oint_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell_2} \tag{20}$$

C で積分するときの経路と C_1 と C_2 で積分するときの経路で異なるのは，分割線の部分である．ここでは，C_1 と C_2 のベクトル場は同じで，積分の方向が反対である．それ故. 足しあわせるとキャンセルされる．図 10 のように分割をもっともっと多くしても，同じことが成り立つ．

$$\Omega = \sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell_i} \tag{21}$$

発散の時と同様に，無限に多くの分割を行い，それぞれの積分経路の面積をゼロにした極限を考える．すると，

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell_i} \\
&= \sum_i \left[\frac{\oint_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell_i}}{\Delta S_i}\right]\Delta S_i \\
&= \int_S \left[\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\Delta S}\right]\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{22}
$$

となる．

ここで，積分内の $\lim_{\Delta S\to 0}\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}/\Delta S$ を考える．これは，ΔS の向きに応じて値が異なることは，容易に分かる．流れのある流体内部に小さい輪っかを入れた場合，その輪の向きにより，回転数は変わる．そのことから，この極限操作を伴う量はベクトルの成分であることが想像できる．ここでは，時間の都合からベクトルであることの証明は行わないが，ベクトルになっている．その方向は，経路を右ねじにする向きである．

従って，

$$
\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \tag{23}
$$

と定義する量を考えることができる．ここで $\boldsymbol{n}$ は，この積分を行う領域の面の法線方向の単位ベクトルで，積分領域の右ねじの向きとする．右辺はスカラー量なので，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ は回転と呼ばれるベクトル量である．

先週示した $\nabla\times\boldsymbol{A}$ という微分がいきなり現れているが，この右辺と等しいことは練習問題とした．発散の場合と同様に，挑戦して欲しい．式 (23) の右辺が回転と呼ばれるベクトル量で，ベクトル場の微分を表す．これが微分になっていることの感触は，式 (1) から汲み取ってほしい．

この回転を用いると

$$
\Omega = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{24}
$$

となる．式 (19) と比べると，

$$
\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{25}
$$

である．これをストークスの定理という．これは,「回転と言われる微分の面積分は，その面の縁の線積分に等しいと言っている．式 (2) のように，微分したものの積分の値は端—ここでは縁—で決まるのである．

ここで，回転の物理的意味をまとめておく．それは，

- 回転 $\nabla\times A$ とは，流れの場（ベクトル場）において，各点の周りでベクトル場が回転しようとする傾向を示すものである．

である．すなわち，ある流れの場にある物体が，その流れに従いどのように運動の向きを変えていくかの度合いを示している．

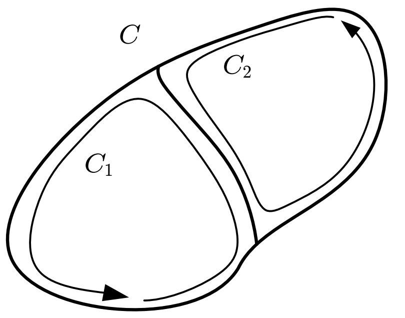

図 9: 2 分割

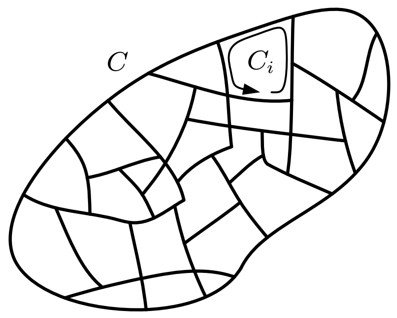

図 10: 微小な区間に分割

5　練習問題

[問 1] スカラー場 $f = x^2 + y^2 + z^2$ に対して，勾配を求めなさい [3].

[問 2] ガウスの定理を証明しなさい.

[問 3] ストークスの定理を証明しなさい.

6　次回演習問題

次回は，関連する諸処の数学定理の紹介をおこなう.

[練習 1] ϕ, ψ をスカラー場とするとき，

$$\int_S (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \left(\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi \right) dV \tag{26}$$

が成り立つことを示しなさい．これをグリーンの定理という [4].

[練習 2] 円の面積が $S = \pi r^2$ で与えられることを証明しなさい.

参考文献

[1] Richard P. Feynman, “ファインマン物理学 3” 岩波書店，1983

[2] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics, Third Edition” John Wiley & Sons, Inc., 2001

[3] 丸山武男，石川望，“要点からわかるベクトル解析” コロナ社

[4] 関根松夫，佐野元昭，“電磁気学を学ぶためのベクトル解析” コロナ社