ベクトル解析で使う様々な定理と
線，面，体積積分

生産システム工学専攻 * 1 年 電気磁気学特論
2015 年 5 月 11 日 (火)

概 要

電磁気学の学習に必要な諸定理を説明する．ディまた，実際の電磁気問題を解く上で重要となってくる線，面，体積積分の各座標系における積分に関する記述方法についてもまとめる．

1　講義内容概略

これまでの講義で，ベクトル解析の復習を行ってきた．簡単なベクトル演算については慣れてくるうちにスムーズに計算できるようになると思う．しかし，最も重要なことは，演算を速く行うことではなく，式からベクトル場の特徴をイメージできるかどうかである．目先の演算に心を奪われ，本質となる物理を見失ってはいけない．特に重要なこととして，ベクトル場の微分とその積分を説明した．これらのもつイメージを常に忘れず，数式が語っていることを理解することが最も重要である．

今回の講義では，ベクトル解析の復習の最後として，特に頻繁に顔を出すディラックのデルタ関数とグリーンの定理の特徴とその取り扱い方を示す．そして，最後にベクトル場の持つ性質について触れる．また，実際の電磁気問題を解く上で特に重要となる，各座標系における線，面，体積積分の記述方法についてまとめる．

2　ディラックのデルタ関数

2.1　デルタ関数のイメージ

大きさの無い電荷や，作用している時間がゼロの衝撃力等を表したいことがある．このような場合，ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を使うと便利である．この関数は，$x = 0$ のと

*独立行政法人　国立高等専門学校機構　秋田工業高等専門学校　専攻科

き無限大の値となり，$x \neq 0$ ならば値はゼロとなる．そして，積分を行うと 1 となる関数[1]である (図 1)．すなわち，

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1 \tag{2}$$

である．これを使うと，都合良く電荷密度を表すことができるが，それはこれからの講義内容である．しかし，衝撃力を表すのにうってつけであることは理解できるであろう．

いろいろな $\delta(x)$ 関数が考えられる．その中でも，直感的にもっともわかり易いのは，図 2 のようなものである．この図の $\varepsilon \to 0$ の極限をデルタ関数とする．デルタ関数の定義である式 (1) や (2) を満足していることが分かるだろう．

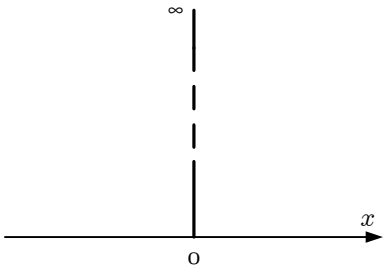

図 1: ディラックのデルタ関数

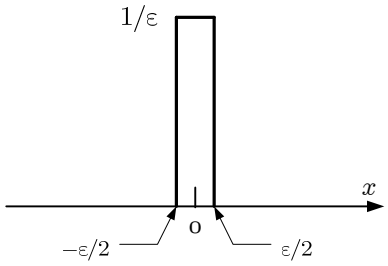

図 2: $\varepsilon \to 0$ の極限がデルタ関数

2.2 さまざまな積分とデルタ関数の定義

このデルタ関数の重要な関係式を示しておこう．

2.2.1 さまざまな積分

積分 1 まずは，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a) \tag{3}$$

である．これは，図 2 をデルタ関数として，次のようにして計算できる．

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} \frac{f(x)}{\varepsilon}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(a+\varepsilon/2) - F(a-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \\ &= f(a) \end{aligned} \tag{4}$$

[1]普通の関数と性質が異なるので，超関数と呼ぶらしい．

積分 2　先ほどの積分は直感的に理解できるであろう．それに対して，次はちょっと難しい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x = -f'(a) \tag{5}$$

これは，次のように，部分積分を使って計算する．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x &= \Big[f(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x \\ &= -f'(a)\end{aligned} \tag{6}$$

フーリエ変換　これは，計算するまでもなく．

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{7}$$

となる．これは，時空空間領域において観測される周期的現象を周波数領域で解析する際に役立つ．

三次元　一次元とほとんど同じで，三次元に拡張することができる．基本的な性質は，

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq 0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = 1 \tag{8}$$

である．同様に積分は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\mathrm{d}V = f(\boldsymbol{a}) \tag{9}$$

となる．これらの振舞いは，一次元とほぼ同じなので，細かい説明はしない．

2.2.2　デルタ関数の定義

これまで，デルタ関数のいろいろな性質を見てきた．いったい，デルタ関数はどのように定義すればよいのだろうか? これまででもっとも一般的な—デルタ関数の性質に関して最も広い範囲をカバーする—式は，

$$\delta(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{ただし，}\boldsymbol{r} \neq 0\text{ の場合} \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\mathrm{d}V = f(\boldsymbol{a}) \tag{11}$$

である．式 (1) や式 (2) に代わり，これをデルタ関数の定義[2] としよう．これが関数の定義としてふさわしいかどうか—という議論もあるだろう．ちゃんとした定義は数学者に考えてもらえばよく，我々はこれで十分である．物理的な内容を便利に表すことができるからである．

[2]定義に積分を使っているが，リーマン積分はできない．

2.3　ラプラス演算子との関係

2.3.1　特異点が原点の場合

つぎにラプラス演算子との関係を示す．後に重要となる公式で，電磁気学ではとくに有用である．もっとも重要な公式は，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{12}$$

である．

これを証明するためには，ちょっと頑張らなくてはならない．まずは，左辺であるが，以前の課題に出したように

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \qquad \text{ただし，} r \neq 0 \text{ のとき} \tag{13}$$

となる．これで，式 (8) の原点 ($\boldsymbol{r} \neq 0$) 以外は証明できた．原点は特異点となる．

原点 ($\boldsymbol{r} = 0$) での値を計算するために，式 (12) の左辺を体積分する．図 3 のように，原点を含まない場合，

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \tag{14}$$

となる．いまのところ，この結果には面白いところはない．値がゼロのところを積分して，ゼロが得られただけである．

図 4 のように積分領域に原点が含まれる場合，大事な結果が得られる．原点は特異点なので，そのまま積分はできない．そこで，原点を含まない領域で積分をする．複素関数論でコーシーの積分公式を導くのと同じ方法である．このようにすると，積分領域に原点が含まれなくなり，積分の値はゼロとなる．そして，連結部を非常に小さくとり，体積分を面積分に直すガウスの定理を使うと，式 (12) の左辺の体積分は

$$\begin{aligned}
\int_{V'} \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V &= \int_S \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= \int_{S1} \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \int_{S2} \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= \int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V - \int_{S2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．ここで，V' は原点を含まない領域に対して，V は原点を含む領域である．V' には原点が含まれないので，積分の値はゼロとなる．従って，

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \int_{S2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{16}$$

となる．これで原点を含んだ領域 V の積分の準備ができた．この右辺の領域を球形にする．すると図から明らかに，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ は $-r$ となる．右辺は，表面積を乗じるだけで

$$\begin{aligned}\int_{S2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S &= -\int_{S2}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S\\ &= -\frac{4\pi r^2}{r^2}\\ &= -4\pi \end{aligned} \tag{17}$$

となる．従って，

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = -4\pi \tag{18}$$

となる．これと，式 (13) とデルタ関数の定義から，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{19}$$

とかける．これで，式 (12) が証明できた．これは，今後しばしばお目にかかる式である．ただし，積分を行うときに重要な意味があることを忘れてはならない．

ところで，式 (18) は不思議な式である．被積分関数は原点を除いてゼロである．原点の値は不定であるが，積分を行うとちゃんとした値になる．

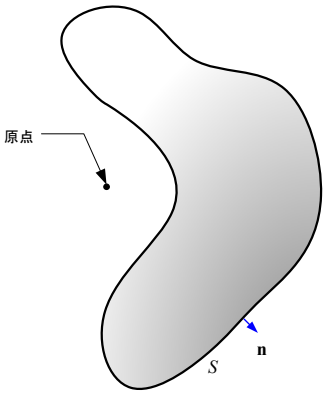

図 3: 原点が積分領域に含まれない場合

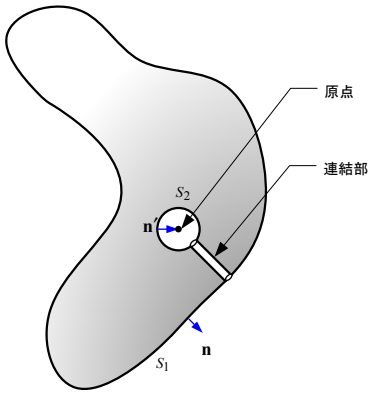

図 4: 積分領域に原点が含まれる場合

2.3.2 特異点が任意の位置

ラプラス演算子が r に作用する場合　次に被積分関数の特異点の位置を変えてみよう．先ほどは原点に特異点があったが，ここでは位置 $\boldsymbol{r}'$ に特異点を移動する．この場合，明らかに

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{20}$$

となる．このとき，$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = |\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$ という関係も満たす．絶対値—位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r}$ の距離—はどちらを基準にしても変化がないからである．これより，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) \tag{21}$$

が得られる．

また，デルタ関数の性質より，$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$ である．デルタ関数の定義の式 (10) に関する矛盾はない．次に式 (11) に関しては，実際に計算してみる．途中，変数変換 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ を使うと，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\mathrm{d}V &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V_x \\ &= f(\boldsymbol{r}') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{22}$$

となる．これから，$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$ がいえるのである．こんな面倒なことをしなくても，直感的に理解できるだろう．

ここでの結果をまとめると，次のようになる．

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{23}$$

ラプラス演算子が $\boldsymbol{r}'$ に作用する場合　次に，$\boldsymbol{r}'$ に作用するラプラス演算子

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right) \tag{24}$$

を導入する．先ほどの結果から，明らかに

$$\nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{25}$$

の関係がある．すべての変数を，プライムの付くものと付かないものを入れ替えただけである．

まとめ　これらの結果をまとめると，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{26}$$

となる．プライムが付くものと付かないものを入れ替えてよいのである．これは後々，かなり便利に使える．

この入れ替えができる演算は限られており，次のような場合は入れ替えができないことに注意が必要だ．

$$\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) \tag{27}$$

3　グリーンの定理

3.1　1 変数関数の部分積分

グリーンの定理は，1 変数の関数の部分積分の公式に似ている．部分積分は，関数の積の微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f'g + fg' \tag{28}$$

から導ける．両辺を積分し，順番を入れ替えると

$$\int f'g\mathrm{d}x = fg - \int fg'\mathrm{d}x \tag{29}$$

となり，部分積分の公式が導かれた．

このように単純な方法で導かれる部分積分の公式は，本当に便利でいたるところに現れる．このベクトル解析版が，次に述べるグリーンの定理である．

3.2　スカラー場での部分積分

[グリーンの定理] スカラー場 $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ があるとする．この領域内の閉じた任意の部分を V とする．そして，この V の境界面を S とする．すると，以下が成り立つ．

$$\int_V (\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g)\mathrm{d}V = \int_S f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{30}$$

$$\int_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right)\mathrm{d}V = \int_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{31}$$

これをグリーンの定理という

【証明】 1 ベクトル解析の恒等式

$$\nabla\cdot(f\nabla g) = \nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g \tag{32}$$

の両辺を体積積分する．左辺にはガウスの定理を用いると，

$$\int_S f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \left(\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g\right)\mathrm{d}V \tag{33}$$

である．これで，式 (30) が証明できた．

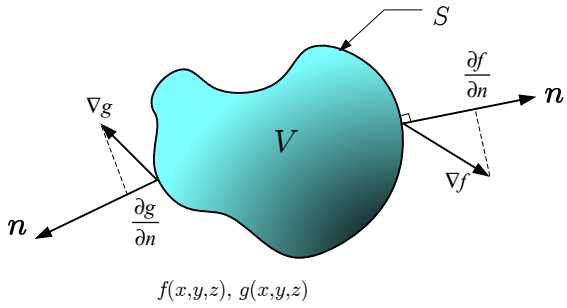

図 5: グリーンの定理の領域

式 (32) と，これの f と g を入れ替変えた式の辺々を引き算すると，

$$\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f \tag{34}$$

となる．同じように体積積分をしてガウスの定理を使うと，式 (31) を得ることができる．

注意 1 グリーンの定理は，

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial n} \tag{35}$$

として，

$$\int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g)\mathrm{d}V = \int_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{36}$$

$$\int_V \left(g\nabla^2 g - f\nabla^2 g\right)\mathrm{d}V = \int_S \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{37}$$

と書かれる場合もある．

4 ベクトル場の性質

4.1 ベクトル場を決めるもの

定理 4.1 任意の領域のベクトル場は，その内部で発散と回転を与え，そして領域の境界での法線方向の成分を与えれば，一意に決まる．

【証明】 2 この定理は，発散と回転と境界条件を決めればベクトル場が決まると言っている．これは，次のようにして証明できる．発散 $\rho(x, y, z)$ と回転 $\boldsymbol{j}(x, y, z)$ とした場合

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}_1 = \rho \tag{38}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{j} \tag{39}$$

とする．問題は，この発散 $\rho(x, y, z)$ と回転 $\boldsymbol{j}(x, y, z)$ を与えた場合，ベクトル場が一意に決まるかということである．

$\boldsymbol{V}_1$ と同一の境界条件で式 (38) と (39) を満たす他のベクトル場 V_2 があるとする．ここで，$\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2$ がゼロならば，ベクトル場は一意に決まると言える．これらの式を満たすベクトル場は無いと言えるからである．そこで，

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2 \tag{40}$$

とおく．このベクトル場 $\boldsymbol{W}$ 発散は，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{W} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2) \\ &= \nabla \cdot \boldsymbol{V}_1 - \nabla \cdot \boldsymbol{V}_2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{41}$$

である．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ は湧き出しが無い．また，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ の回転は，

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{W} &= \nabla \times (\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2) \\ &= \nabla \times \boldsymbol{V}_1 - \nabla \times \boldsymbol{V}_2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

となる．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ には回転が無い．ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ は回転がないので，

$$\boldsymbol{W} = -\nabla \phi \tag{43}$$

とスカラー場を用いて記述ができる．ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ には湧き出しが無い ($\nabla \cdot \boldsymbol{W} = 0$) ことから，

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{44}$$

である．

これで準備が整った．$\boldsymbol{W}$ が考えている空間 V にわたってゼロであることを証明したい．そのためには，

$$\int_V \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{W} \mathrm{d}V = 0 \tag{45}$$

が言えればよい．$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{W}$ はベクトル $\boldsymbol{W}$ の大きさの 2 乗で必ずゼロ以上である [3]．従って，その積分がゼロとなるためには，いたるところで $\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{W}$ がゼロとならなくてはならない．従って，$\boldsymbol{W}$ が積分区間で全てゼロの場合のみ，式 (45) が成り立つ．

[3] $\boldsymbol{W}$ が複素ベクトルの場合は，$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{W}^*$ となり，ゼロ以上である．$\boldsymbol{W}^*$ は複素共役を表す．

与えられた条件で式 *(45)* の右辺を計算して，それがゼロになることを確認する．取り合えず，左辺に分かっている条件を入れて計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
\int_V \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\mathrm{d}V &= \int (-\nabla\phi)\cdot(-\nabla\phi)\,\mathrm{d}V \\
&= \int \nabla\phi\cdot\nabla\phi\mathrm{d}V \\
&\qquad\qquad \text{グリーンの公式の (31) から} \\
&= \int_S \phi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S - \int_V \phi\nabla^2\phi\mathrm{d}V \\
&\qquad\qquad \text{式 (43) と (44) から} \\
&= -\int_S \phi\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_S \phi\,(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_S \phi\,(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S \\
&\qquad\qquad \text{境界では，}\boldsymbol{V}_1\text{と}\boldsymbol{V}_2\text{の法線成分は等しいので} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{46}
$$

となる．従って，定理が証明できた．

この定理のなにがうれしいかというと，ベクトル場を記述する微分方程式は，回転と発散で良いと言うことを示していることである．いろいろな法則は微分方程式で記述しなくてはならないが，ベクトル場の場合は回転と発散の値を決めれば，ベクトル場が決まると言うことである．境界条件は必要であることは言うまでもない．

4.2 ベクトル場の微分方程式について

4.2.1 ベクトル場の微分方程式の解

証明すべき内容 ベクトル場を表す微分方程式

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \qquad\qquad \nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{47}
$$

が分かったのでその解を示す．ここで，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルを表す．先に示したように，これらの方程式と境界上でのベクトル $\boldsymbol{V}$ の法線方向の値を決めれば，ベクトル $\boldsymbol{V}(r)$ は一意に決まる．

結論から先に言うと，ベクトル $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は，

$$
\boldsymbol{V} = -\nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{48}
$$

となる．ここで，$\phi(\boldsymbol{r})$ はスカラポテンシャル，$A(\boldsymbol{r})$ はベクトルポテンシャルで次のようにして計算できる．計算するときの座標系は，図 6 の通りである．積分の範囲は無限遠までである．

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{49}$$

これが本当に成り立つか証明しなくてはならない．そのためには，式 (47) が表すベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ と，式 (48) と式 (49) がつくるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が等しいことをいえばよい．ベクトル場が等しいためには，前節の「ベクトル場を決めるもの」で述べたように，おのおののベクトル場の発散と回転が等しいことを言えばよい．式 (47) が表すベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の発散と回転は，それぞれ $\rho(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ である．したがって，式 (48) と式 (49) がつくるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が式 (47) のベクトル場と等しくなるためには，

$$-\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{50}$$

$$\nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{51}$$

となる必要がある．なぜならば，回転の発散はゼロだし発散の回転もゼロで，ベクトル場は発散と回転を決めれば一意に決まるからである．したがって，これらの式を証明することになる．**[注意]** これらの式の演算子 ∇ は全て，プライムのつかない座標に作用する．このベクトル場の解が正しい事の証明は，今日の課題とする．少々難しいかもしれないが，今日取り扱ったデルタ関数等を駆使するため，復習の意味でも頑張ってトライして欲しい．

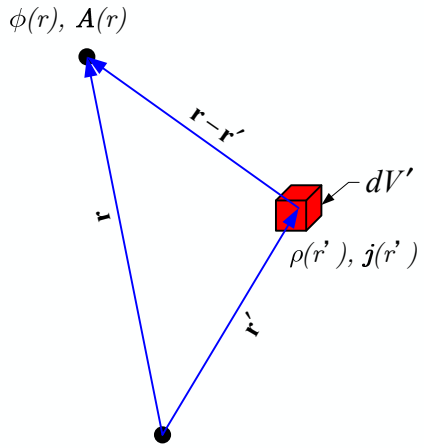

図 6: 原点と積分の座標系

4.2.2　ヘルムホルツの定理

先に示したように，任意のベクトル場は渦無し (irrotational) と渦有り (solenoidal)[4] の和であらわすことができる．すなわち，次のようにである．

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{52}$$

任意のベクトル場は，渦無しと渦有りのベクトル場から出来上がっている．言い替えると，ベクトル場は渦無しと渦有りの 2 種類がある．これを**ヘルムホルツの定理**と言う．

渦無しと渦有りの意味を述べておいた方がよいだろう．$\nabla\phi$ から作られるベクトル場は渦無しである．これは

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla\phi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{53}$$

から，わかる．回転がゼロなので，渦無しである．一方，

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times A) &= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{54}$$

であるから，$\nabla \times \boldsymbol{B}$ から作られるベクトルは渦有りである．

5　座標系の選択と積分の取扱い

これまでの講義を通してベクトル解析を復習し，積分形のガウスの法則を用いて実際の問題を解いてみた．しかし，これまで数学的な表現のみで全く形式的で優しかった問題が，実際の電磁気の問題を解こうとするととたんに手が止まってしまう学生も多いだろう．実際，前回の演習問題を解こうとすると，ちんぷんかんぷんになったに違いない．その理由は，実際の問題を解こうとした場合，それらを全て直交座標系を用いて解くことは極めて困難であり，問題ごとに適切な座標系を選択する必要があるからである．問題には，この問いに対してはこの座標系を用いなさいなんて丁寧な解説はない．したがって，

[4]渦無しに対して，通常管状と言うらしい．英語の直訳のようである．なので私はこの表現が嫌いなので，渦有りと言う事にする．

問題を解く人がセンスよく適切な座標系を選択して使う必要がある．直感の鋭い人なら，問題を読めばすぐに適切な座標系を見抜くことができるかもしれないが，私を含め大多数の人は，多くの問題を解くことでこのセンスを磨く必要がある．

そこで，ここに実際の問題で登場する座標系についてまとめようと思う．実際の問題を積分系のガウスの法則を用いて筆算で解くことができる問題は極めて限られており，ここに示す直交座標系，円筒座標系，極座標系くらいである．この他の複雑な問題の場合は，有限要素法といった数値解析手法を用いることになる．

この付録では，2 段階でお話を進める．まず始めに，直交座標系から円筒，極座標系へ変換する時に必要なヤコビアンについて説明する．その後，これを用いて線要素，面積要素，体積要素が各座標系でどのようになるのかを，図を使いながら説明する．これを読み終わる頃には，もう円の面積が πr^2 だと暗記する必要がなくなっていることを祈る．

5.1 ヤコビアン

ここでは，数式をうにうにいじくる議論よりも直感的な理解を優先させるため，図を使った簡単なお話だけにしておく．理論物理学の先生から怒られるかもしれないが，学生には直感的理解が何より最優先と考えるので，このようにしたい．より正確な数学的表現に興味がある人は，数学の先生に聞くか，自分で調べてみて欲しい．

まず始めに，2 次元直交座標における面積をもとめる問題を例に考えてみる．つまり，図 7 の左図のようなものを考える．四角を考えるのであれば，変数は dx, dy のみで十分で，微小面積 dS は，$dS = dxdy$ となるのは問題がないだろう．一方，同じ 2 次元平面上の，円を考えたい場合はお話が変わってくる．この場合は，変数として径方向を示す r と x 軸からの角度を示す θ を用いると都合が良い．つまり，図 7 の右図のようにである．このようにすると，円の面積は変数 r, θ の微少量を使って，$drd\theta$ を積分すればよいことになる．この r, θ を変数として表現する座標系を，極座標系という．しかし，座標変換をする時は，注意が必要である．それは，直交座標系から極座標系に変換するとき，ただ単純に $dS = dxdy = drd\theta$ としてはダメだからである．なぜか？図 7 の右図を見るとわかるように，$dxdy$ と $drd\theta$ が示す面積には差が生じてしまうためである．この差を考慮に入れて座標変換をする必要があるのである．すなわち，

$$dS = dxdy = |J|drd\theta \tag{55}$$

とし，$drd\theta$ に何らかの係数 $|J|$ を乗ずることにより，面積の差を表現する必要があるのである．この何らかの係数 $|J|$ のことを，ヤコビアンと呼ぶ．

この面積の差を表現するのは簡単で，x, y を r, θ で偏微分したもので表現できる．つまり，x, y の r, θ へのそれぞれの変化量を考慮するのである．2 次元の場合，直交座標系と極座標系とでは，

$$x = r\cos\theta \tag{56}$$

$$y = r\sin\theta \tag{57}$$

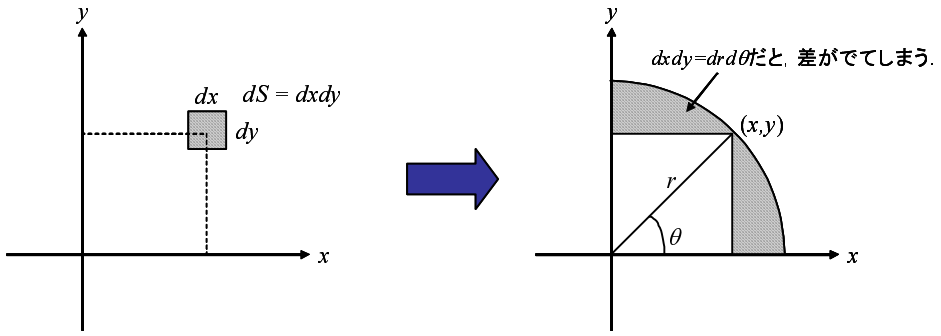

図 7: 2 次元直交座標と極座標での面積

という関係があるから，ヤコビアンは以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r
\end{aligned} \tag{58}
$$

よって，2 次元直交座標系の面積 dS は，極座標系において以下のように変換される．

$$
dS = dxdy = rdrd\theta \tag{59}
$$

本当か？円の面積と円周を求めてみよう．円の面積は，r の積分範囲として $0 \sim r$，θ の積分範囲として $0 \sim 2\pi$ とすると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^r \int_0^{2\pi} rdrd\theta \\
&= \pi r^2
\end{aligned} \tag{60}
$$

一方，円周 L は円の半径 r を a と固定し，積分は θ のみを行えばよいから，

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} ad\theta \\
&= 2\pi a
\end{aligned} \tag{61}
$$

この計算結果は，おそらく今までみんなが小学校の頃暗記してきた円の面積と円周に他ならないだろう．もう暗記しなくても，ちょっとの計算で求めることができるようになったのである．

2 次元での座標変換がわかったので，3 次元のお話をしたい．この場合も考え方は全く同じなので，結果だけを書くにとどめようと思う．

図 8 に示す座標系を考える．この場合，x, y, z と r, θ, ϕ には，以下の関係がある．

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned} \tag{62}
$$

よって，ヤコビアン $|J|$ は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= r^2\sin\theta
\end{aligned} \tag{63}
$$

以上の結果より，3 次元極座標系における体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ となることは簡単に確認することができる．各自でやってみよ．

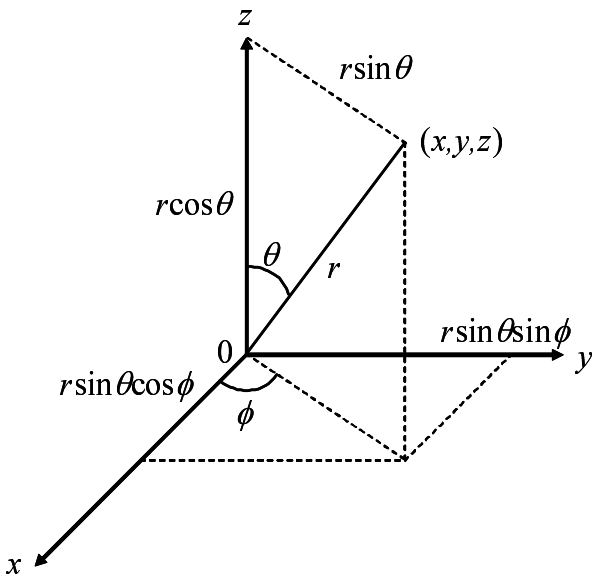

図 8: 3 次元直交座標と極座標

5.2　直交座標，円筒座標，極座標における，線要素，面積要素，体積要素

直交座標系から極座標系への変換が理解できたので，図を含めてこれらの線積分，面積積分，体積積分を視覚的に考えてみる．各座標系における微小線要素，微小面積要素，微小体積要素を，以下に図として示す．

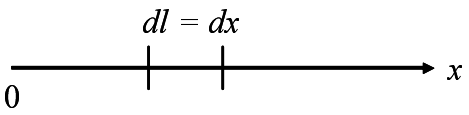

図 9: 直交座標系における線要素

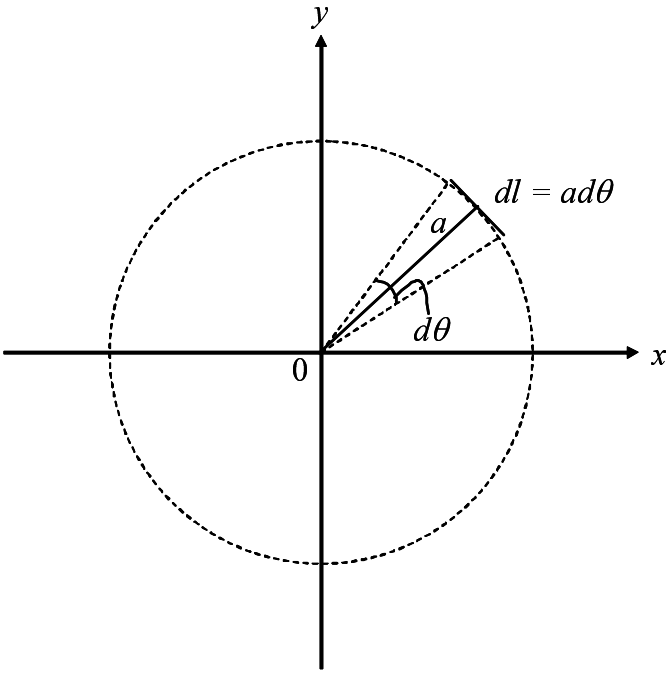

図 10: 極座標系における線要素

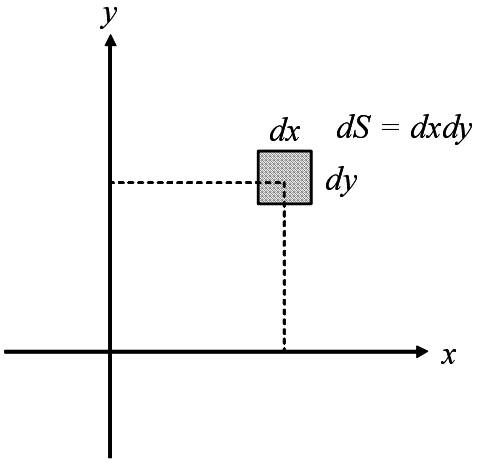

図 11: 直交座標系における面積要素

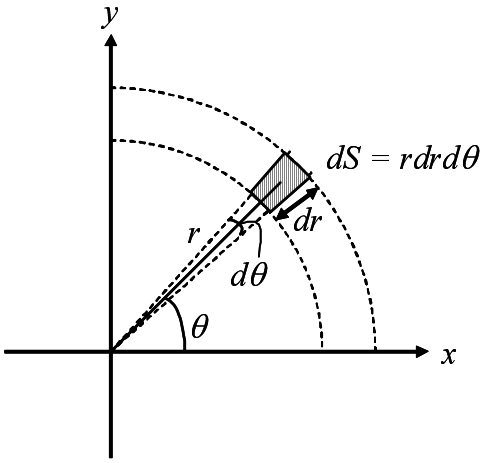

図 12: 極座標系における面積要素

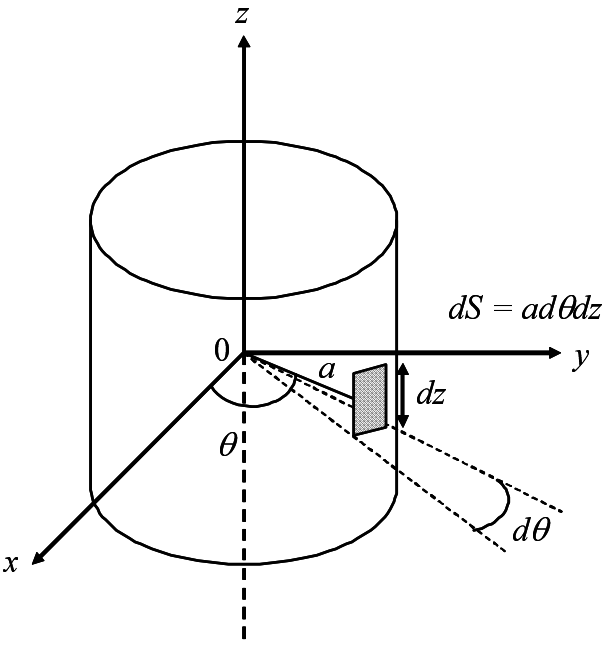

図 13: 円筒座標系における面積要素

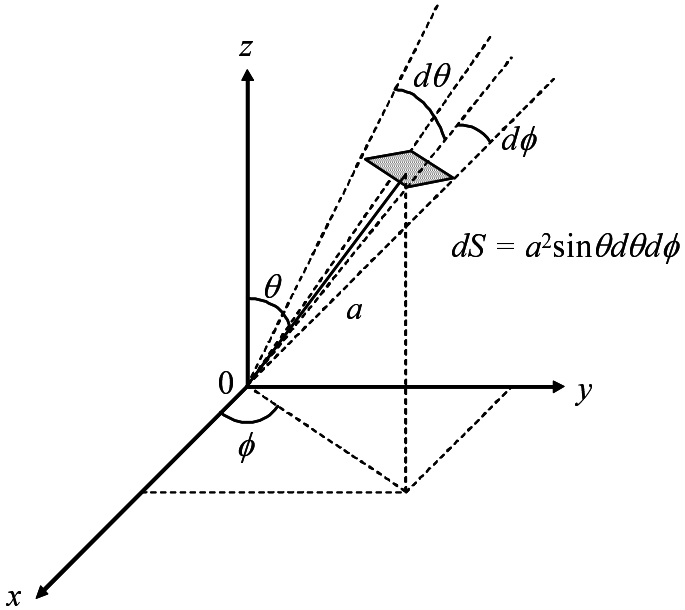

図 14: 極座標系における面積要素

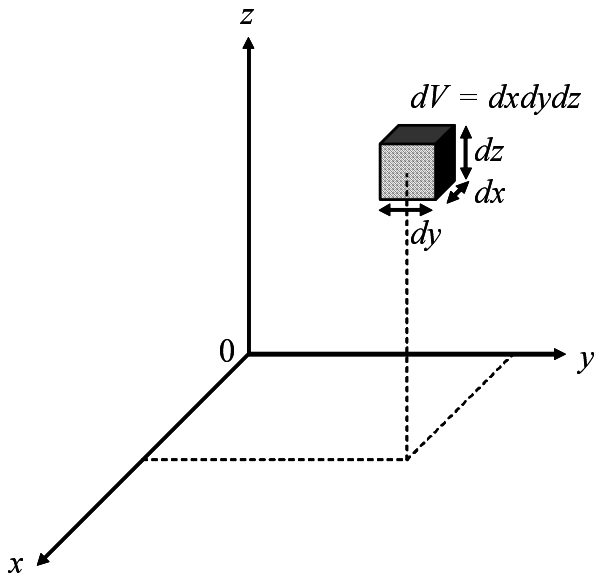

図 15: 直交座標系における体積要素

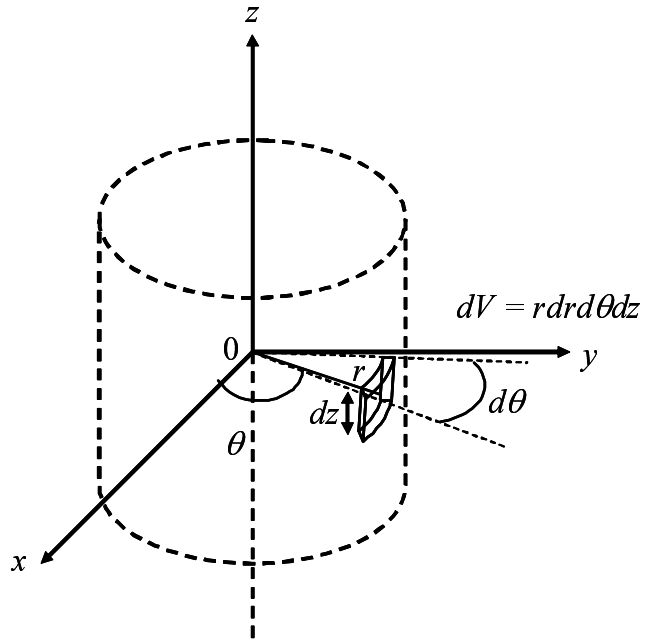

図 16: 円筒座標系における体積要素

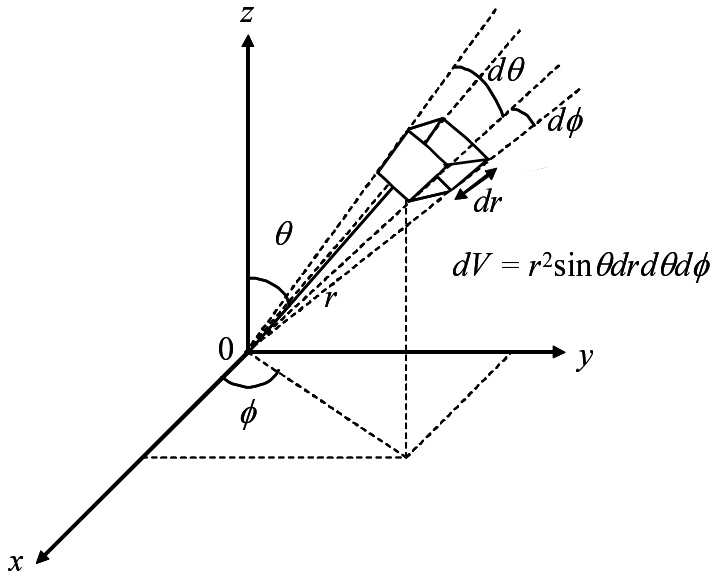

図 17: 極座標系における体積要素