静電場 1
(近接作用の考え方と静電場を表す微分·積分方程式)

生産システム工学専攻* 1 年　前期　電気磁気学特論
2015 年 6 月 2 日 (火)

概 要

電磁気学の最も簡単な場合，静電場（電荷の位置と量が時間によらず一定）を考える．クーロンの法則からスタートし，スカラーポテンシャルまでを説明する．また，近接作用の考え方に対応する場の概念として，静電場の満たす微分方程式を導く．さらに，ガウス，ストークスの定理を用いて，積分形の式を導く．

1　本日の授業内容

今日は静電場についてである．静電場とは，電荷が空間内において時間的にその位置と量が一定である場合の事である．この静電場における問題は，クーロンの法則と，重ね合わせの原理を用いて全て理解する事ができる．しかし，少し複雑な体系を考えようとすると，複雑な積分が登場したりと，なかなか大変な事になってしまう．しかし，場の考え方を利用すると，色々な法則が発見され，空間における電場の大きさやスカラーポテンシャルを理解する事が可能になった．

今回の授業においても，静電場を理解するためにベクトル解析などの数学が多く用いられる．しかし，忘れてはならないのは，数学はあくまで物理現象を表現する道具にすぎず，我々の目的は，物理現象を理解することである．

これらを踏まえ，今回の講義の目標を以下のように設定する．

- 遠隔作用と近接作用の考え方を理解する．
- クーロンの法則が近接作用の考え方に完全にマッチする，静電場を表す微分方程式と積分方程式を理解する．
- 静電ポテンシャルを理解する．

*独立行政法人　国立高等専門学校機構　秋田工業高等専門学校　専攻科

2　静電力と静電場

2.1　静電力の式の分割

先週，クーロンの法則について説明した．もう一度，電場を導入するために，この法則について考えてみる．真空中に置かれた 2 つの電荷の間に働く力は，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2} \tag{1}$$

と書くことができる．この式のそれぞれ記号とその単位については，表 1 に示している．qQ が負であれば，2 つの電荷に働く力は引力となり，正であれば斥力となる．当面，$1/4\pi\varepsilon_0$ は比例定数と考えておこう．

表 1: クーロンの法則の単位．ただし，SI 単位系である．

記号	物理量	単位	mksA での表現
F	力	N	$\mathrm{m\ kg\ s^{-2}}$
Q または q	電荷量	C	s A
ε_0	真空中の誘電率	F/m	$\mathrm{m^{-3}\ k^{-1}\ s^4\ A^2}$

この力は，2 通りの見方ができる．遠隔作用と近接作用である．二つの電荷，q と Q のみが存在する場合の一方の電荷 q に働く力を考える．まずは，遠隔作用であるが，その概念を図 1 に示す．電荷 Q が q を引っ張っているのである．それだけの話であるが，何もない空間を通して力が作用しているのである．何もない空間を通して力が作用するということはなかなかイメージできない．なぜならば，普段我々が感じている力は，直接的に作用する圧力や激力，ゴムの伸び縮みなどは弾性体を介して作用しているからである．媒体を全く用いずに力が作用するのは，超能力的な考え方であり，口が開いてしまう．

次に近接作用であるが，そのイメージは図 2 である．Q があることにより q が受ける力は遠隔作用の結果と同じである．しかし，力の伝わり方が異なる．近接作用の場合は 2 段階で，

- Q がその周りの空間をゆがめる (場を変化させる).
- 場が変化した結果，その場から q は力を受ける．

と考えている．

遠隔作用と近接作用の考え方のうち，どちらが正しいかというと，クーロンの法則だけ考えると，どちらも正しいという事になってしまう．しかし，前回の講義でお話したとおり，遠隔作用の考え方は，実験的にも正しくはなく，力が伝搬するのには有限の時間が必要になる．そして近接作用の考え方を導入する事により，全てがすっきりと，実験と矛盾なく理解する事ができるのである．

では，これまでに学んだクーロンの法則の式 (1) を，近接作用の考え方に適した形に変形してみる．そのためには，

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{2}$$

$$F = qE \tag{3}$$

とすればよい．この 2 つの式が意味するところは，

- 式 (2) : 電荷 Q により r の位置の電場 E が生じる．
- 式 (3) : その電場の作用により電荷 q は F という力を受ける．

である．このように，場を介して作用を受けるのである．まさに，近接作用の考え方である．

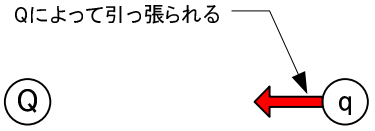

図 1: 電荷 q に及ぼされる遠隔作用

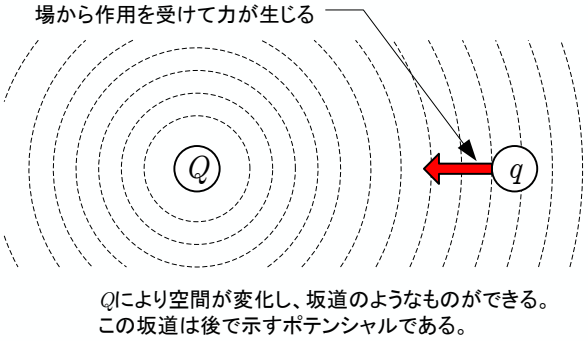

図 2: 電荷 q に及ぼされる近接作用

2.2 電場の取り扱い方

2.2.1 電気力線

先ほどの電場の導入には，わかり易くするためにベクトルを用いなかった．電場の概念が分かったので，ベクトルを使った正確な記述を行う．ベクトルを使ったクーロンの法則は，

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{4}$$

となる．$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ は単位ベクトルなので，ちゃんと距離の 2 乗に反比例した力になっている．この式がクーロンの法則の全てを言っている．ベクトルは便利である．

これでクーロン力のベクトル表現は求まった．次に電場であるが，q_2 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ に作る電場は，

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{5}$$

となる．q_2 が作る電場を図 4 に示す．電場に沿った線が電気力線である．実際の空間にはこのような線は存在しないが，電場を考える時には非常に便利だ．ただし，注意しなくてはいけないのは，この電気力線は必ず正の電荷から出て負の電荷に終わるか，または始点か終点のどちらかが無限遠にのびている．また，電気力線を用いて電場の方向や大きさを表現する時，同じ電荷量の電荷からは同じ本数の電気力線を書かなくてはならない．でも，電気力線の絶対値に決まりはないので，本数は書く人の自由，何本書いてもいいのである．

もう少し式 (5) を一般化しよう．$\boldsymbol{r}'$ の位置にある電荷 $q(\boldsymbol{r}')$ が，ある任意の位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{6}$$

となる．

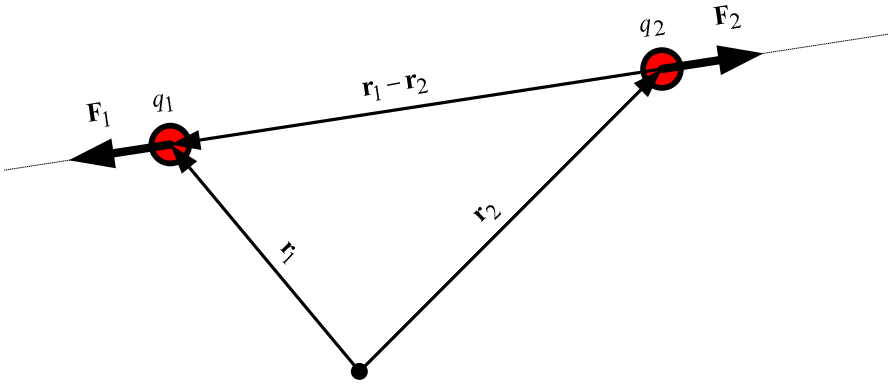

図 3: クーロン力

2.2.2 重ね合わせの原理

前回の課題にもあったように，3 つ以上の電荷が空間にある場合には，電場あるいはクーロン力の重ね合わせの原理が成り立つ．すなわち，ある任意の位置 $\boldsymbol{r}$ の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \tag{7}$$

となる．この様子を図 5 に示す．

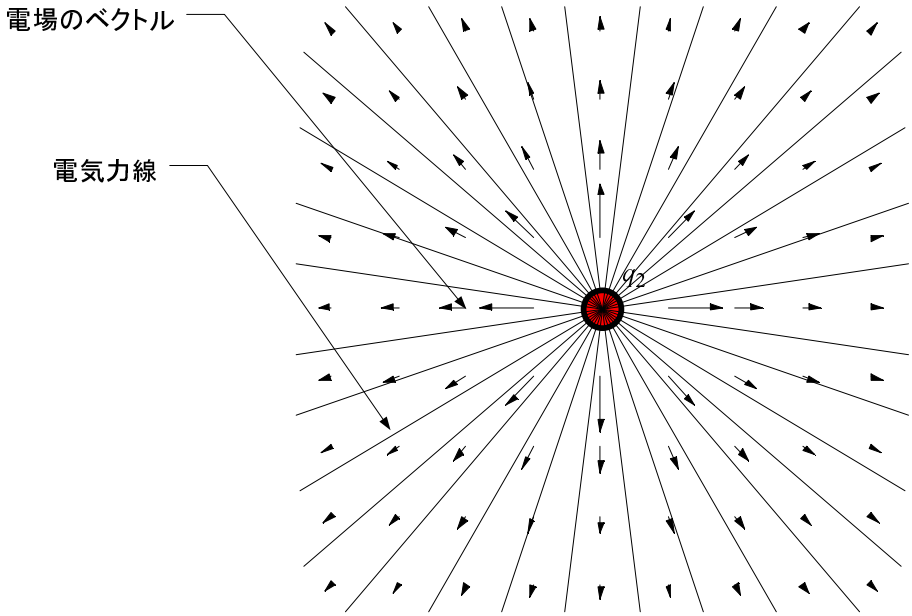

図 4: 電場と電気力線

次に，電荷が連続的に分布していると仮定しよう．位置 $\boldsymbol{r}$ での電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると，先ほどの和の部分は積分となり，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{8}$$

と表せる．この様子を図 6 に示す．宇宙全体にわたってこの積分を行えば，静電場は分かる．しかし，実際の問題でこの積分を行うことはまず無い．単純な場合を除いて，この積分を実行することは大変である．さらに言うならば，近接作用の考え方を取り入れた形，式 (6) や (7)，(8) は完全な近接作用の表現とは言えない．そこで，電場を違う視点から考察し，完全に近接作用の考え方にマッチした電場の表現方法を考えてみる．

3　静電場の微分方程式（ガウスの法則）

電場を導入することにより近接作用の考えを導入したつもりでいた．しかし，式 (6) や (7)，(8) は，まだ満足できない．遠隔地にある電荷が電場を作っている式になっている．近接作用を考えると，その場所の電場はその周りからのみ作用を受けるべきである．そのためには，式を微分形に直すのが良いだろう．それぞれの式は正しいので，それを上手に使い微分形の式を導く．

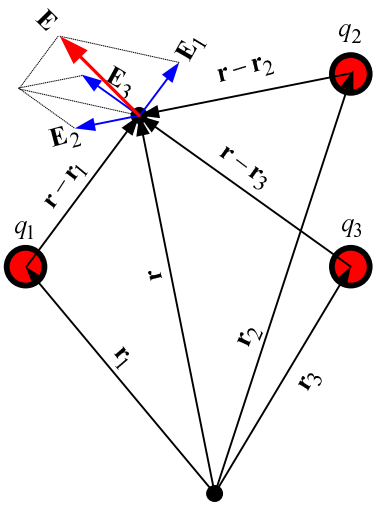

図 5: 点電荷がつくる電場の重ね合わせ

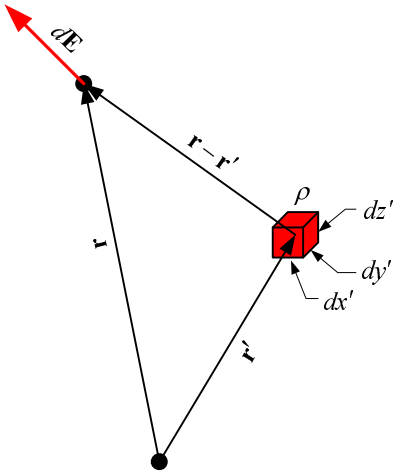

図 6: 連続分布した電荷が作る電場の重ね合わせ

3.1 静電場を表す微分方程式（微分形のガウスの法則）

クーロンの法則から，静電場 $\boldsymbol{E}$ が満たす微分方程式を探す．静電場の問題は，クーロンの法則である式 (5)，あるいはそれを一般化したクーロンの法則である式 (8) が全てを語っている．この一般化されたクーロンの法則から，静電場に関わる式の全てを導くことができる．そこで，これを使って，静電場を表す微分方程式を導く．式 (8) は長いので，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{9}$$

と書き直す．体積分を行う領域 V' は考慮している空間，全てにわたっている．これを出発点としても良いが，もう少し変形しておく方が，後々都合が良い．ベクトル解析の知識を少し使うと，クーロンの法則は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{10}$$

と書ける．この式変形は難しくないので，各自でトライしてみて欲しい．この式を出発点としよう．ここで，積分は $\boldsymbol{r}'$ を変数とするが，勾配 ∇ は $\boldsymbol{r}$ を変数とする．この変数の違いに注意が必要だ．

静電場 $\boldsymbol{E}$ を表す微分方程式は，発散と回転により決めることができる．以前のベクトル解析で述べたように，任意のベクトル場は発散と回転から決めるとができる．一方，静電場は，式 (10) を用いて，過不足なく表すことができる．したがって，一般化されたクーロンの法則の式 (10) の発散と回転を計算すれば，静電場を表す微分方程式を求めることができる．

それでは，式 (10) の両辺の発散を計算する．

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')\nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\
&\qquad \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \text{ より } (\delta \text{ 関数のプリントを参照}) \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}') \times \{-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\}\,\mathrm{d}V' \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \\
&= \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{11}$$

これで，電場の発散が計算できた．当然，この式の座標変数は $\boldsymbol{r}$ のみなので，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

と書いてもよい．$\boldsymbol{r}'$ がないので，間違えることはない．

教科書では，この微分形のガウスの法則を違うアプローチで証明している．が，結局は同じ事を行っているに過ぎず，結論は同じなのである．

ベクトル場の微分方程式の片割れが分かった．残りは，回転である．先ほど，同様に一般化されたクーロンの法則の式 (10) の両辺の回転を計算する．式 (10) の両辺の発散を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}')\nabla \times \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\
&\qquad \text{ベクトル恒等式 } \nabla \times \nabla\phi = 0 \text{ より} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

これで，電場の回転が求まった．電場の回転はゼロである．

以上をまとめると，電場を表す微分方程式は，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{14}$$

と書ける．

3.2 静電場を表す積分方程式（積分形のガウスの法則）

先に求めた回転と発散は，ガウスの定理とストークスの定理を用いて，容易に積分形に直すことができる．発散の式の両辺に対し体積分を行い，ガウスの定理を用いると，以下のようになる．

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{15}$$

となる．発散の右辺の方は単に電荷密度の体積積分にすればよい．従って，発散の式を積分形に直すと，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{16}$$

となる．これが，積分形のガウスの法則である．この体積分を含む等式は，任意の領域で成り立つ．一般化されたクーロンの法則の式 (10) の場合，全ての領域 (全宇宙) にわたって積分を行う必要がある—のと大きく異なっている．

この積分形のガウスの法則が言っていることは，

- ある任意の閉じた空間の内部の電荷の総量を誘電率で割った値は，その空間の表面にわたっての電場の積分に等しい．

である．これは，便利な式で，軸対象な電荷分布による電場を計算する場合，頻繁に使うことになる．

次は，回転に関する積分形の式を求める．回転の式の両辺を面積積分を行い，ストークスの定理を用いると，以下のようになる．

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}S = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\ell$$

回転をあらわす右辺はゼロなので，積分を行ってもゼロである．従って，積分形は

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\ell = 0 \tag{17}$$

となる．この式が意味するところは，

- 任意の閉じた領域で静電場を積分するとゼロになる．

である．

4 静電ポテンシャル

実際に電場を計算するためのもう少し便利な式を導いておこう．静電場をあらわす一般化されたクーロンの法則の式 (10) は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right\} \tag{18}$$

と書いてもよい．体積分の積分変数は $\boldsymbol{r}'$ で，勾配 ∇ の微分の変数は $\boldsymbol{r}$ と異なるから，微分と積分を入れ替えることができる．ここで，右辺にある体積積分を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{19}$$

とする．これは，全ての空間—宇宙全体—にわたっての積分である．この積分の値 ϕ をスカラーポテンシャルと言う．このスカラーポテンシャルを導入することにより，電場は，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{20}$$

と簡単に計算できる．以前，任意のベクトル場は渦有りと渦無しの場に分解できると述べた．この式から，静電場は渦無しのベクトル場で，渦有りの部分が無いことが分かる．

次にスカラーポテンシャルの性質を調べてみよう．電荷 q を静電場の中に置くと，$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ という力を受ける．その力に抗して，その電荷を A 点から B 点まで，移動させるのに必要な仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= -\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\ell \\ &= -q\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\ell \\ &= q\int_A^B \nabla\phi\cdot \mathrm{d}\ell \\ &= q\left[\phi(B)-\phi(A)\right] \end{aligned} \tag{21}$$

となる．以前，勾配 ∇ の積分のところで説明したように，この積分は経路に依存しない．積分の両端の場所のみによって，この仕事量 W は決まるのである．仕事量 W は，A 点に比べたときの B 点での電荷 q が持つエネルギーの増加をあらわしている．$q\phi$ を位置によるエネルギー，すなわちポテンシャルエネルギーと解釈することができる．よく考えると，この ϕ は電圧の定義とも等しい．ポテンシャル ϕ と言っているが，これは電圧と言い替えても差し支えない．

式 (17) から，電場の周回積分はゼロと分かっている．従って，

$$\oint \nabla\phi\cdot\ell = 0 \tag{22}$$

となる．これは，微小区間での電位差 $\nabla\phi\cdot\ell$ を足しあわせて，任意の閉じた経路を積分するとゼロになると言っている．これは，回路で使うキルヒホッフの法則の片割れである．式 (22) は静電場で適用され，キルヒホッフの法則は交流のように時間的に変化する回路でも成立する—と言う反論がある．通常の回路の大きさは，その動作周波数の波長に比べて，十分小さい．そのため，電磁気学的に見ると，ほとんど静電場で近似できる．したがって，波長よりも十分小さい普通の回路では，式 (22) は良い近似となる．一方，波長が短くなり，回路と同程度の大きさになると，もはやキルヒホッフの法則は成り立たなくなる．

5 まとめ

静電場の基本法則を，近接作用の考え方に完全にマッチする形として導いた．特に静電場を表す微分方程式は，電荷が存在するとその周りに場ができる事を示している．

重要な結果をまとめると，以下のようになる．

ここまでのまとめ

静電場を表す微分方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} : \text{微分形のガウスの法則} \tag{23}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 : \text{微分形の名もない法則} \tag{24}$$

静電場を表す積分方程式

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V : \text{積分形のガウスの法則} \tag{25}$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\ell = 0 : \text{積分形の名もない法則} \tag{26}$$

静電（スカラー）ポテンシャルを導入し，電場を

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi \tag{27}$$

と簡単に表現する事ができる．

6 演習問題

[練習 1] 電荷が線密度 λ [C/m] で線状に分布している．電荷分布は直線上で無限に長く，その直径は無視できるとする．電場を求めよ．

[練習 2] 電荷が密度 ρ [C/m^3] で半径 a の円柱状に分布している．円柱は無限に長いとして，その内外での電場を求めよ．

[練習 3] 電荷が密度 σ [C/m^2] で無限に広い平面上 (平らな平面) に分布している．そのときの電場を求めよ．

7 次回演習問題

[練習 1] 教科書 P.43 の演習問題 (1)~(3)