静電場 2
(静電ポテンシャルと場のエネルギー)

生産システム工学専攻[*] 1 年　前期　電気磁気学特論
2015 年 6 月 9 日 (火)

概 要

静電ポテンシャルを考え，これによるポアソン方程式を導く．ポアソン方程式を用いて，電気双極子の問題を解く．さらにコンデンサの問題を解く事により，静電場のエネルギーの表現方法を示す．

1　静電ポテンシャルとポアソン方程式

先週，クーロンの法則からスタートし，近接作用に完全にマッチしたガウスの法則を導出した．このガウスの法則をうまく使う事によって，ある程度の問題を解く事ができる．しかしながら，手計算でガウスの法則により電場を求める事ができるのは，考えるべき対象に対称性が有る場合である．こんなものは，身の回りを考えてみると極限られている．そんな時，一体どうやって電場を計算したらよいのやら．ポアソン方程式を考えると，これらが可能になってくる．

1.1　これは使える!!静電場の計算方法

電場 $\boldsymbol{E}$ は，以下に示す発散と回転を示す微分方程式を解けば計算することができる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2}$$

具体的にこれらを使ってどのように電場を求めたら良いのか? これは少々複雑なのである．なぜならば，電場 $\boldsymbol{E}$ はベクトル場であるから，(E_x, E_y, E_z) という 3 つの成分を持つからである．ではこれをもっと簡単に計算する方法ないかであるが，先週の講義で登場した静電

[*]独立行政法人　国立高等専門学校機構　秋田工業高等専門学校　専攻科

ポテンシャルを用いる事で計算が随分楽になる．静電ポテンシャル ϕ を求めて，その後その勾配を求めてあげれば良いのである．

それでは，静電ポテンシャル ϕ が満たす方程式を考えてみよう．先週示した通り，静電ポテンシャルと電場の関係は，以下のようになる．

$$E = -\nabla\phi \tag{3}$$

これは，静電場を表す微分方程式 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ を満足している（勾配の回転はゼロ）．よって，残りは $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ を満たすようにする．これを満たすようにするには，式 (1) を式 (3) に代入し，

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

とすれば良い．したがって，静電ポテンシャルをあらわす微分方程式は

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

となる．この式を「ポアソン方程式」と言う．また，領域に電荷がない場合は $\rho = 0$ になるので，

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{6}$$

となり，これを「ラプラス方程式」と言う．静電場の場合，一般的にはポアソン方程式で，電荷が無い特別な場合「ラプラス方程式」となる．

ここで，電場 $\boldsymbol{E}$ が電荷 q に与える力 $\boldsymbol{F}$ を考えてみよう．それは，$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ に電場と静電ポテンシャルの関係である $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ を代入する事で求まる．つまり，

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -q\nabla\phi \tag{7}$$

となる．電荷 q が力学的な位置エネルギー V を持つ時，それに作用する力は $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ で表される．これらの関係を比較すると，

$$V(\boldsymbol{r_q}) = q\phi(\boldsymbol{r_q}) \tag{8}$$

である事がわかる．これからも，ϕ が電圧そのものであることが理解できるだろう．

ポアソン方程式 (5) は，スカラーの方程式なので解きやすい．解きやすいといっても，これを直接計算するのは，そんなに易しいことではない．

計算はそんなに簡単ではないが，既にこの方程式の解は分かっている．以前，示したとおり

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{9}$$

であり，これがポアソン方程式 (5) の解となる．無限遠を基準 ($\phi = 0$) としたときの任意の場所のポテンシャルを示す．この体積積分は，全宇宙にわたって行う必要がある．解は

分かっているが，この解を使って静電ポテンシャルを計算することができるのは単純な問題に限られる．(時間の都合で説明は割愛するが，複雑な体系を解く場合は，積分範囲を微小領域に分け，各領域の境界に条件を課す境界要素法や有限要素法などで求める．)

静電ポテンシャルが分かるとなにがうれしいかであるが， それは，静電ポテンシャルはそれだけでも電圧という物理的な意味がある．それだけでもうれしいが，それを微分することにより電場も求められるのである．静電ポテンシャルが分かると静電場の問題は解けたと言える．

1.2 電気双極子

唐突に電気双極子と言われても，ちょっと困惑するかもしれないが，静電ポテンシャルを使って計算することの利点がはっきりするので，考えてみる事にしよう．静電ポテンシャルから電場を計算する良い例である．

図 1 のように，電荷量の絶対値は等しいが符号が異なる 2 つの電荷が近距離にあるようなものを電気双極子と言う．この電気双極子が P 点に作る電場を求めたい．このような場を求める場合，静電ポテンシャルが大いに役立つ．

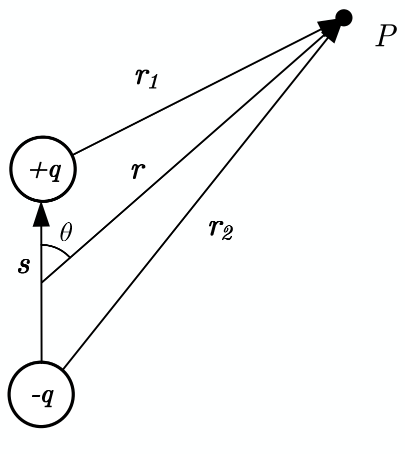

図 1: 電気双極子

図 1 の P 点でのポテンシャルを計算する．ただし，$|\boldsymbol{s}| \ll |\boldsymbol{r}|$ とする[1]．P 点での静電ポテンシャルは，各電荷の式 (9) で示される静電ポテンシャルに重ね合わせの原理を用いて，

[1]このような大小関係が現れた場合，計算のどこかでテイラー展開を使うのだと思えたら，一人前．

以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \\
&\qquad \text{余弦定理より} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - rs\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - rs\cos(\pi - \theta)}}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{2r}\right)^2 - \frac{s}{r}\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{2r}\right)^2 + \frac{s}{r}\cos\theta}}\right] \qquad (10)
\end{aligned}
$$

ここで，$r/s \ll 1$ として，テーラー展開

$$
f(1 + \Delta x) \simeq f(1) + f'(1)\Delta x + \frac{f''(1)}{2!}\Delta x^2 + \cdots \qquad (11)
$$

を行う．これを使って，式 10 の (s/r) の一次の項まで，計算する．するとルートの部分のテイラー展開は

$$
\frac{1}{\sqrt{1 + \Delta x}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\Delta x \qquad (12)
$$

となる．これを利用すると，(s/r) の一次の項までの計算は，

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 + \frac{s}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{s}{2r}\cos\theta\right)\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{s}{r}\cos\theta \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を

$$
\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{s} \qquad (14)
$$

と定義する．すると，双極子が作るポテンシャルは，

$$
\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{qs\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qsr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (15)
$$

と書きあらわせる．

これで静電ポテンシャルが求まった．残りの問題は，これを微分して電場に直すことで

ある．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\nabla\phi \\
&= -\nabla\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{p}\cdot r)\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}+\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}+\frac{3\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}{r^5}\right]
\end{aligned}
\tag{16}
$$

このように，静電ポテンシャル ϕ を求める事により，電場 $\boldsymbol{E}$ を求める事ができた．

2　コンデンサーと静電場のエネルギー

2.1　導体表面の電荷分布（静電誘導）

図 2 のように絶縁体の棒を帯電させて，金属球に近づけると，クーロン力により金属中の自由電子は移動し，その結果，電荷分布の偏りが生じる．この場合，金属中の電場がゼロになるように，自由電子はとても早く移動する．もし，電場がゼロでないとすると，その作用により自由電子は電場をゼロにするように移動する．すなわち，電場がゼロになるまで電子は移動し続けるのである．この電場がゼロという状態は，外部の帯電させた絶縁体が作る電場と金属内の自由電子が作る電場をあわせてゼロということである．すなわち，金属内の自由電子は，外部からの電場をキャンセルするように移動するのである．

内部の電場の状態は分かった．金属の表面ではどうなるか? 金属の表面での接線方向の電場はゼロになる．もし，接線方向に電場があると，ここでも電子はそれをゼロにするように移動する．従って，接線方向の電場はゼロにならなくてはならない．従って，金属の表面では電場は法線方向のみとなる．

金属の表面の法線方向の電場は，積分系のガウスの法則から導くことができる．金属表面の法線方向の電場を E_n とする．金属内部には電場はないので，この法線方向の電場は外側のみにある．そして，金属表面の電荷密度を σ とする．ここで，表面の微少面積 δS を考えると，ガウスの法則は，

$$
E_n\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon} \tag{17}
$$

となる．従って，

$$
E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{18}
$$

である．これが，表面電荷密度と表面の電場の関係である．

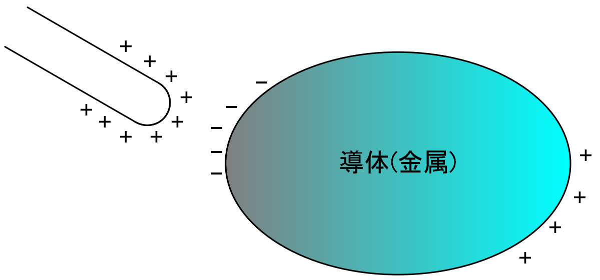

図 2: 静電誘導

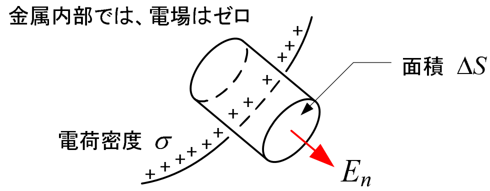

図 3: 表面にガウスの法則 (積分形) を適用

2.2 コンデンサー

2 つの導体を近づけて，各々に導線を接続させるとコンデンサーができあがる (図 4)．2 つの金属に正負が反対で等量の電荷 ($+Q$ と $-Q$) を与えたとする．このとき，両導体の間の電圧 (電位差)

$$V = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{19}$$

は [2] 積分の経路によらない．これは，場所 A を基準電位にしている．2 つの間の空間で，この積分が経路によらないのは，以前スカラー積の積分で示したとおりである．

また，電荷の分布の形が変わらなければ，電圧は電荷量に比例する．これは重ね合わせの原理が成り立つからである．従って，次のような量

$$C = \frac{Q}{V} \tag{20}$$

が定義できるはずである．この C は静電容量と呼ばれ，2 つの導体の形状と，その間の媒質の誘電率で決まる．

ここで，実際のコンデンサーの容量を求めてみよう．問題を簡単にするために，図 5 の平行平板コンデンサーを考える．下側の導体には $+Q$ が，上側には $-Q$ の電荷があるとする．通常，コンデンサーでは，導体間隔 (x 方向) に比べて，水平方向 (y,z 方向) には十分広い．そして，一様に電荷は分布している．そのため，電場は，$(E_x, 0, 0)$ と考えることができる．また，導体の間の空間では，ガウスの法則が成り立つので，E_x は至る所で同じ値になる．その値は，式 (18) より，

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \\ &= \frac{Q}{\varepsilon S} \end{aligned} \tag{21}$$

となる．ここで，S は導体の面積である．

[2] $E = -\nabla\phi$ より．スカラーポテンシャル ϕ は電気回路では電圧 V のこと．

電圧は，これを積分すれば良いので，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^d \frac{Q}{\varepsilon S}\mathrm{d}x \\
&= \frac{Qd}{\varepsilon S} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

となる．したがって，平行平板コンデンサーの容量は式 (20) から，

$$
C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad (23)
$$

となる．これは，よく知られた式である．大きな容量のコンデンサーを作るためには，導体の間隔 d を小さく，その面積 S は広く，誘電率 ε の大きな媒質を使うことになる．

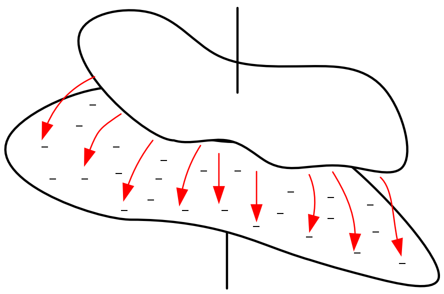

図 4: 2 つの金属プレートによるコンデンサー

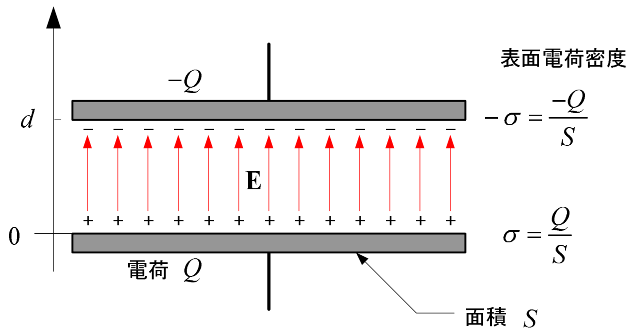

図 5: 平行平板コンデンサー

2.3 コンデンサーに蓄えられるエネルギー

コンデンサーの両電極に $+Q$ と $-Q$ を蓄えるためには，どれだけの仕事が必要か考えよう．電極に $-q$ と $+q$ が貯まっていた場合を考える．上の電極から，$\mathrm{d}q$ の電荷を取り，それを下の電極に移動させることを考える．電極間には電場があるため，それから受ける力に抗して，電荷を移動させなくてはならない．その抗力と反対の外力により，電荷を移動させることになるが，それがする仕事 (力 × 距離)$\mathrm{d}W$ は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -\mathrm{d}q \int_d^0 E_x \mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{d}q \int_d^0 \frac{q}{\varepsilon S}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{d}q \frac{qd}{\varepsilon S} \\
&\qquad (C = \varepsilon S/d \text{ なので}) \\
&= \frac{q}{C}\mathrm{d}q \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる．

コンデンサーの両電極に $+Q$ と $-Q$ を蓄えるために必要な外部からの仕事の総量は，式 (24) を 0〜Q まで積分する事により求められる．仕事の総量は，

$$\begin{aligned} W &= \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \end{aligned} \tag{25}$$

である．外部からの仕事は，コンデンサーの内部にエネルギーとして蓄えられる．両電極にモーターを接続すると，それを回すことができ，蓄えられたエネルギーを取り出すことができる．コンデンサーに蓄えられたエネルギーは静電エネルギー U_e と言い，これを

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{26}$$

のように記述する．これは，式 (20) を用いて

$$U_e = \frac{1}{2}CV^2 \tag{27}$$

と書かれるのが普通である．これで，コンデンサーをある電圧で充電したとき，そこに蓄えられているエネルギーが計算できる．

2.4 静電場のエネルギー

コンデンサーのエネルギーはどこに蓄えられているのであろうか? 近接作用の考え方 (場の考え方) を取り入れると，それは両電極の空間に静電エネルギーあると考える．それでは，コンデンサーの蓄積エネルギーを場の式に直してみよう．そのために，電場を式 (18) を用いて，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon S} \tag{28}$$

と書き換えておく．これと，コンデンサーの容量の式 (23) を用いると，蓄積エネルギーは，

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S\,d \\ &= \int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{29}$$

と書き換えられる．

これから，コンデンサー内部でのエネルギー密度は $1/2\varepsilon E^2$ と考えても良いだろう．これは，一般化できて，電場のエネルギー密度 w は

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 \tag{30}$$

と計算できる．この式は，静電場のみならず，時間的に変化する場でも適用できる．

3　演習問題

[練習 1]　教科書 P.43 の演習問題 (1)~(3)

4　次回演習問題

[練習 1]　教科書 p.54-55 の練習問題 (1)~(3)