

定常電流

生産システム工学専攻*1年 電気磁気学特論
2015年6月19日(金)

概要

静磁場の導入の前に、電流とは何かを考えてみる。なぜなら、静電場の源は動かず変化しない電荷であったのに対し、静磁場では、一定の速度で運動する電荷がその源となるからである。

はじめに電流を場の量として表現する方法を示す。そして、重要な電荷保存則を示す連続の式を導出する。最終的に、オームの法則の物理的意味について考え、電気回路のイメージを掴む。

1 講義内容概略

前回の講義において、静電場の基本のお話はおしまいである。もし時間が許すのであれば、物質中における電場のお話もしたいが、半年という限られた時間で話を進めざるを得ないため、先に進もうと思う。時間がある時に補助的な資料も配布したいと思う。さて、この講義では静磁場のお話に入る前に、電流とは何かを考えてみようと思う。なぜなら、静磁場の源となるのは電流であるからである。

電流を考えることで、重要な電荷保存則を示す連続の式を示す。更に、これまで日常的に使っていたオームの法則について考えてみることにする。

具体的に、以下をこの講義の到達目標とする。

- 電流の正体が理解でき、説明することができる。
- 電荷保存則が理解できる。
- オームの法則が意味する本質が理解できる。

*独立行政法人 国立高等専門学校機構 秋田工業高等専門学校 専攻科

2 定常電流と保存則

2.1 電流について考える

電荷の流れが電流を作ることとは何となく想像がつく。水の分子の流れが水流を作るのと同様である。電流の場合、電荷には正負があり、正の電流の流れる方向を電流の方向と定めている。実際の回路では、導体中の負に電荷を帯びた電子が電流を担う。従って、電子の流れと電流の流れは逆になっている。これには何だか違和感を覚えるが、歴史的な経緯でそのようになってしまった。仕方がない。電子よりも先に電流が発見され、その方向が決められたことによる。

導線に流れる電流は、

- 断面を単位時間に通過する電荷量

と定義される。式で表すと、

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

である。ここで、 I は電流、 Q は電荷量、 t は時間を表す。この電流の単位として通常はアンペア [A] が使われるが、これは [C/s] と同等である。SI 単位系では、クーロン [C] よりもアンペアの方が基本単位として用いられるので、電荷量を [A·s] と書くこともある。

導線に流れる電流 I は場の量としてふさわしくない。これは、導線の直径にわたってのトータルの性質を表しているからである。そこで、場の量として電流密度 $\mathbf{j}$ を定義することにする¹。電流 I は明らかにスカラー量である。これはある断面 S を通り抜ける単位時間あたりの電荷量となる。ある微小断面積 dS 、その法線ベクトルを $\mathbf{n}$ 、微小電流量 dI とすると

$$dI = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2)$$

となるであろう。なぜならば、図 1 に示すように、どんな S でもそこを通り抜ける電荷量は同一なので、 $\cos \theta$ がかかる。これは、丁度法線ベクトル $\mathbf{n}$ と電流密度ベクトル $\mathbf{j}$ とのスカラー積の計算になる。このようなことから、式 (2) が成立する。

このことから、ある断面 S を貫く電流は、

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3)$$

と表すことができる。

¹教科書では電流密度に $\mathbf{i}$ を使っているが、これは虚数単位と間違いやすい。なので、 $\mathbf{j}$ を使うことにしよう。教科書によって $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ さまざまである。

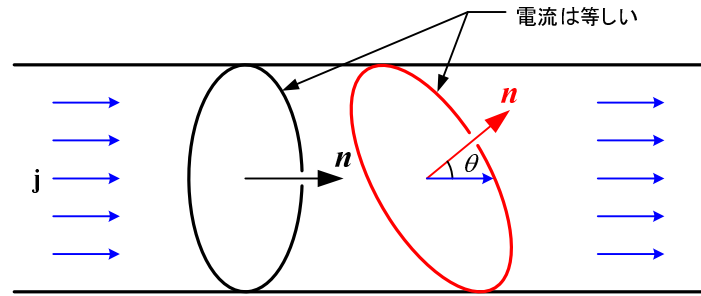


図 1: 電流密度と電流

2.2 積分形の定常電流の保存則

ここでは、電流密度と電荷の関係を考えてみよう。そのために、有限の体積をもつ閉じた系を考える。この系の表面で先ほどの積分、式 (3) を適用する。この積分が負の場合、それはこの体積中に電流が注入されることになる。すると、電流は電荷の流れなので、電荷が時間とともにどんどん貯まることになる。一方、正の場合はその逆で外に出て行ってしまうので、電荷が減ってしまう。ゼロの場合は、入った分だけ出ていく、あるいは出た分だけ入ってくる。すなわち正味の電荷量に変化は無いことになる。つまり、

- 電荷は途中で消滅したり増加したりしない。

この事実を、電荷保存の法則という。

式 (3) を考えている系の表面 S にわたり積分すると、系から出ていく電流 I_s が分かる。それは、

$$I_s = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4)$$

となる。この電流は、式 (1) と比較すると、そこを通して出ていく時間あたりの電荷量 Q_o に等しいことがわかる。出ていった分、系内部の電荷量は Q だけ減少しているとする、電荷保存の法則から、

$$Q_o + Q = 0 \quad (5)$$

となる。このことから、電流は、

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{dQ_o}{dt} \\ &= -\frac{dQ}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

と書ける。これは、外部に向かって電流が流れ出ると (左辺)、内部の電荷量が減少する (右辺) と言っている。この式は電荷の保存の法則を、式で表したものである。電荷量 Q が場の量でない、場の量である電荷密度 ρ に置き換えると、

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (7)$$

となる。これが式で書いた電荷保存の法則 (積分形) である。

場の量である電流密度 $\mathbf{j}$ も電荷密度 ρ も、場所と時間 (x, y, z, t) の関数である。時刻とともに、これらの場が変化しないとき定常状態と呼ぶ。従って、定常状態では時間微分の項がゼロになるから、

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (8)$$

となる。定常状態では、閉じた系のトータルの電流はゼロである。これは、内部で電荷量の変動が無いことを示している。つまり、入った分だけ出ていくと言っている。

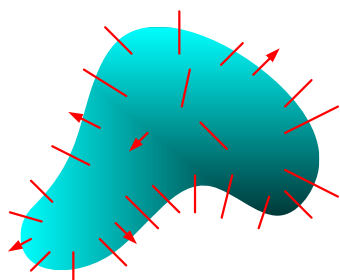


図 2: $\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \leq 0$ の場合、閉じた空間内の電荷量は増加する。

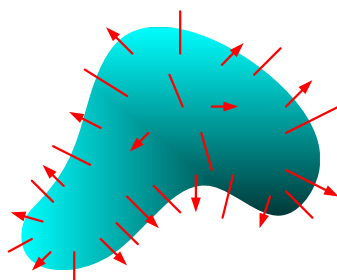


図 3: $\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ の場合、閉じた空間内の電荷量は変化しない。(入った分だけ出ていく、あるいは、その逆)

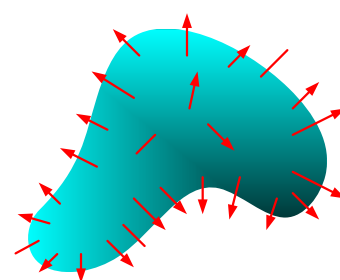


図 4: $\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \geq 0$ の場合、閉じた空間内の電荷量は減少する。

2.3 微分形の定常電流の保存則

式 (7) の右辺をガウスの発散定理を用いて書き直し、左辺は微分と積分の順序を交換する。そうすると、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = - \int_V \frac{d\rho}{dt} dV \quad (9)$$

となる。この式は、いつでもどのような形の閉曲面でも成立する必要がある。そのためには、

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{d\rho}{dt} \quad (10)$$

となる必要がある。これを、微分形の電荷保存の法則という。電流密度の発散は、電荷密度の変化の割合に等しいと言っている。

この場合、定常状態は、

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (11)$$

と表せる。定常状態では電流の発散は無い。すなわち、入った分だけ出る。または出た分だけ入るということ。

3 オームの法則

3.1 ちょっと、余談

3.1.1 大気中の電流

ファインマン物理学Ⅲ 9章 [1] の話である。大気中の電流は稲妻やイオン、あるいはイオンがついた水滴などが担っている。大気中の電流の振舞はとても複雑で、ここで述べる事はできない。時間も私の知識も不足している。ただし、このファインマンの教科書に書かれている面白い内容のみ紹介しておこう。

大気中には $100[\text{V/m}]$ くらいの電場がある。地上の電圧をゼロとすると、上昇するに従い電圧が高くなる。その様子を図5に示す。この電場により、約 $10^{-12} [\text{A/m}^2]$ とごくわずかな電流が流れている。電流の担い手は、宇宙線により電離された空気の分子—イオン—である。

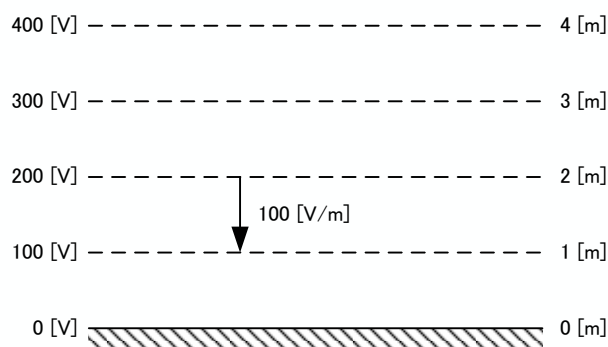


図 5: 地上付近の電場の様子

こんなに強い電場があるにも関わらず、なぜ人間は感電しないのであろうか？ 感電をするためには電流が流れる必要がある。そのためには頭の先と足元で電圧が異なり、かつ人体が電流を流さなくてはならない。人体は、電氣的には良導体で電流は流れやすい。大気中での人間の回りの電圧—スカラーポテンシャル—は図6のようになる。これは人間が良導体のため、一瞬にして電子の移動が生じ、内部の電場が無くなり、頭の先から足元まで同じ電圧になるのである。このようなことから人間は感電しないのである。

上空 $50,000[\text{m}]$ には、比較的電気伝導率の高い層がある。地上とこの層でコンデンサーを構成している。コンデンサーの電圧は、 $400,000[\text{V}]$ である (図7)。このコンデンサー中を約 $10^{-12} [\text{A/m}^2]$ の密度で電流が流れている。地球全体でのトータルの電流量は $1800[\text{A}]$ にもなる。電力は $700[\text{MW}]$ にもおよぶ。

このような大電流が流れば、コンデンサーはすぐに放電してしまう。実際、そのようなことは起きておらず、耐えず $100[\text{V/m}]$ の電場が存在して、上空から電流が降り注いで

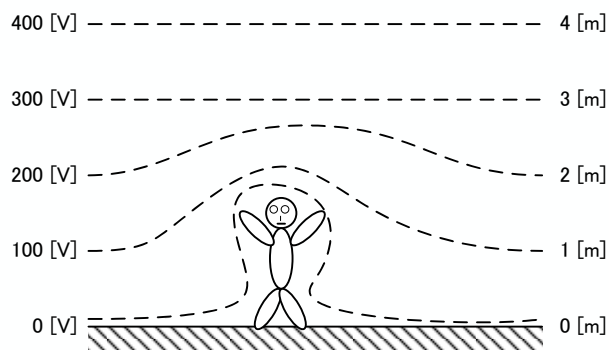


図 6: 人間の回りの電場の様子

いる。このようなことが起きるためには、コンデンサーに充電する機構が必要である。雷雨がその役割を担っている。雷が地球に負の電荷を運び、コンデンサーを充電しているのである。驚いたことに、雷は放電しているのではなく、充電をしているのである。では、雷雲の成長過程と、雷雲内部の電荷分布はどのように形成されていくのだろうか？実は、この問題は非常に複雑で、未だ完全には理解されていないのである。非常に面白い研究対象である。

3.1.2 電気回路

普通の回路は、金属あるいは半導体でできている。この場合、電流の担い手は電子である。半導体では正孔があたかも電流のキャリアに見えることがある。正孔をキャリアとして扱うが、この場合でも動いているのは電子である。そのことを忘れてはならない。

ほとんどの場合、回路中の電子は電場により動かされている。その他の力で動かされることは、非常にまれである。

3.2 オームの法則

電流の正体がはっきりしたので、回路理論で最も良く使われているオームの法則について考えてみよう。いままでは、オームの法則は電流と抵抗、電圧の関係である事を学んだであろう。ここでは、電流を場の量に書き改め、オームの法則は“電場の作用により電流が流れる”という事を表した式に書き改める。この表現こそが、本当のオームの法則である。

まず、図8のような棒（導体）を考えよう。この両端に定常電流 I を流すと、それに比例

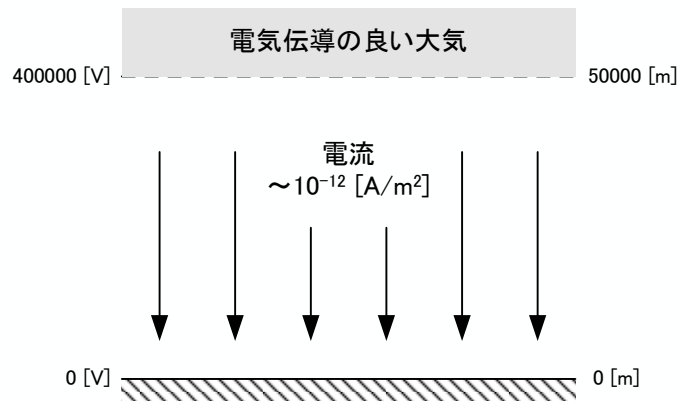


図 7: 上空での電場の様子

した電圧 V が発生する。これをオームの法則と言ひ、中学生が知っている表現を使うと、

$$V = IR \quad (12)$$

と書き表せる。この比例定数 R が電気抵抗 (あるいは抵抗) と呼ばれる量で、かなり広い範囲で電圧や電流に依存しないで一定の値である。しかし、物質やその状態、形には依存する。抵抗の単位は $[\Omega]$ と書き、オームと読む。SI 組み立て単位だと、 $[\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{S}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}]$ である。

実験によると、この抵抗 R は導体の長さ L に比例して、断面積 S に反比例する。すなわち、

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (13)$$

である。この比例定数 ρ を抵抗率と言う。この抵抗率は導体の形に依存しないで、導体固有の値である。すなわち、導体の物性値である。また、抵抗が断面積に比例すると言うことは、電流は導体の内部全体にわたって流れていることを表している。

それでは、電流は場の量として適さないので、電流密度を用いて場の量で表してみよう。まずは、オームの法則を

$$V = I \rho \frac{L}{S} \quad (14)$$

と書き改める。これはいつでも成立するので、非常に小さい領域で考えることにする。すると、

$$\Delta V = \Delta I \rho \frac{\Delta L}{\Delta S} \quad (15)$$

が成り立つ。これを変形して、

$$\frac{\Delta V}{\Delta L} = \rho \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (16)$$

である。よく見ると、左辺は電場、右辺の $\Delta I / \Delta S$ は電流密度を表している。従って、

$$E = \rho j \quad (17)$$

となる。通常、 ρ の逆数である電気伝導率 σ をつかって、この式は

$$j = \sigma E \quad (18)$$

と書かれる。これが、場の量で書かれたオームの法則である。以前の式 $V = IR$ では、導体の形状が途中で変化する場合に成立しなくなるが、場で表現した $j = \sigma E$ はいつでもどこでも成立する。なのでこれからは、オームの法則って？と聞かれたら、まずこの式で答えよう。

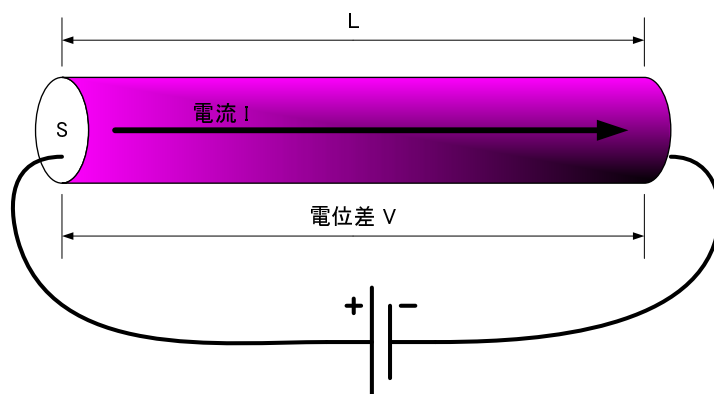


図 8: オームの法則

4 回路

回路のイメージは図9にのように描く事ができる。水量が電流を表し、水管の高さが電圧である。水を組み上げるポンプが電池、あるいは発電機である。水管の一部には小さな水車が仕込まれており、水が流れると回る。これが抵抗である。水車は水流から力学的なエネルギーを得ることができ、それを熱エネルギーに変える。

このモデルはなかなか良い。キルヒホッフの法則

- 回路のいかなる場所でも、電流の出入りの総和はゼロである。
- 回路のいかなる経路でも、一周すると電圧の総和はゼロとなる。

を満足する。水管が途中で枝わかれしても、そこでの水の流れの総和はゼロである。また、任意の水管の経路の高さの変化を積分するとゼロになる。

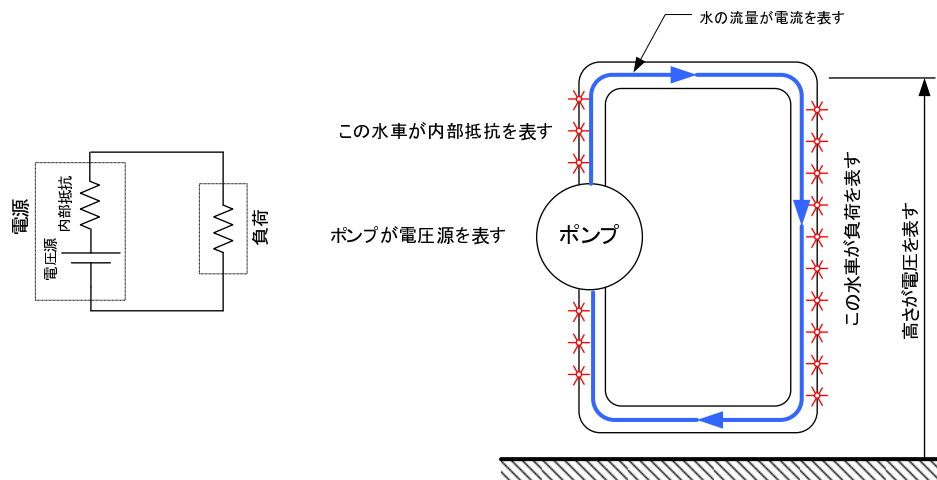


図 9: 電気回路と水の流れの類似

5 演習問題

[練習 1] 教科書 p.54-55 の練習問題 (1)~(3)

6 次回演習問題

[練習 1] 半径 a の無限に長い円柱状の導線に電流 I が一様に流れているとき、導線の内外に生ずる磁場を求めなさい。

[練習 2] 2 辺の長さが $2a, 2b$ の長方形の導線回路に電流 I が流れているとき、回路の中心に生じる磁場を求めなさい。

[練習 3] 問題 2 において、1 辺の長さが l の正方形の場合はどうなるか求めなさい。

参考文献

[1] Richard P. Feynman, “ファインマン物理学 3 電磁気学” 岩波書店, 2003