

静電場におけるエネルギーと力

電気情報工学科* 3年 基礎電気磁気学

2015年10月28日(水)

第19回(後期第4回)

概要

帯電した導体を持つ静電エネルギーについて考えコンデンサに蓄えられるエネルギーを求めてみる。さらにこのエネルギーが電荷に与える力についても考えてみる。

1 帯電導体を持つエネルギー

導体が帯電するとクーロンの法則より導体の周囲には電場が広がる。この電場がある空間に試験電荷¹を置くと、クーロン力によって電荷が移動する。電荷が移動するということは、電荷に何かしらのエネルギーを得るということであり、帯電した導体の周囲には電気的なエネルギーがあるということになる。そこで、この電気的なエネルギーがどのように表現できるかについて考える。

その前に、導体を帯電させる(電荷を蓄える)ために必要なエネルギーについて考えてみる。これは結果的に帯電した導体を持つ電気(静電)エネルギーを考えていることになるからである。

導体を帯電させるために、無限遠方から導体に電荷を少しずつ運んでくることを考えよう。完全に電氣的に中性がとれている導体に、電荷 $Q[C]$ を帯電させるために、無限遠方から微小電荷 dq を少しずつ導体に運び、合計で $Q[C]$ になるようにする。この微小電荷 dq を運ぶために必要な仕事 dW は、すでに帯電した導体の電荷による電場に逆らって電荷を運ぶ必要があり、そのために必要な仕事 $dW[J]$ は、

$$dW = vdq = \frac{q}{C}dq[J] \quad (1)$$

*独立行政法人 国立高等専門学校機構 秋田工業高等専門学校

¹電場がつくる空間の電位差やエネルギーを求めたい場合、電荷を仮に電場中におき、それを移動させるのに必要な仕事を求める。この時に使用する架空の電荷を試験電荷という。

となる²。ここで C は帯電した導体の静電容量であり、 v は導体に帯電した電荷 dq が周りの空間に作る電位である。無限遠方から合計 Q になるまでに要する仕事 $W[J]$ は、これを $0[C]$ から $Q[C]$ にわたって積分して

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} [J] \end{aligned} \quad (2)$$

となり、 $Q = CV$ の関係から、

$$W = \frac{1}{2} CV^2 [J] \quad (3)$$

となる。これが帯電した導体をもつ静電場のエネルギーである。

2 コンデンサに蓄えられるエネルギー

コンデンサは帯電した導体を向かい合わせたものである。なので、先に考えた帯電した導体をもつエネルギーと全く同様に考えることができる。

コンデンサに電荷 $Q[C]$ を帯電させるために必要なエネルギー $W[J]$ は、コンデンサを構成する導体に電荷 $Q[C]$ を帯電させるために必要なエネルギー $W[J]$ に等しいから、以下のように書ける。

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4)$$

さらにコンデンサの極板間（導体間）における電圧を $V[V]$ とすると、

$$W = \frac{1}{2} CV^2 [J] \quad (5)$$

となる。これがコンデンサに蓄えられるエネルギーである。

3 エネルギーと帯電した導体間に働く力

図1に示すように、コンデンサは電荷量が等しく異符号の電荷が帯電した導体が向き合っている。これにより導体間には電場が生じ、静電エネルギーが蓄えられる。ここで異符号の電荷が向き合っているということは、両極板はクーロン力により引き合っているということになる。ここではその静電エネルギーとコンデンサを構成する極板形状との関係を考えてみる。

ここでは、クーロン力によって極板が少しだけ $\Delta x[m]$ 動くのに必要な力 $F[N]$ を考える。この少し Δx の変位を**仮装変位**といい、この考え方を**仮装変位の原理**という。

²この関係は次元解析すると導出できる。クーロンの法則から電場 E によって q が受ける力 $F[N]$ は、 $F[N]=qE[C][V/m]$ なので、 $[N][m]=[C][V/m][m]=[C][V]$ である。よって必要となる仕事 W は、 $W = Fx$ つまり $[J]=[N][m]=[C][V]$ である。これより、 $dW = vdq$ が成立する。

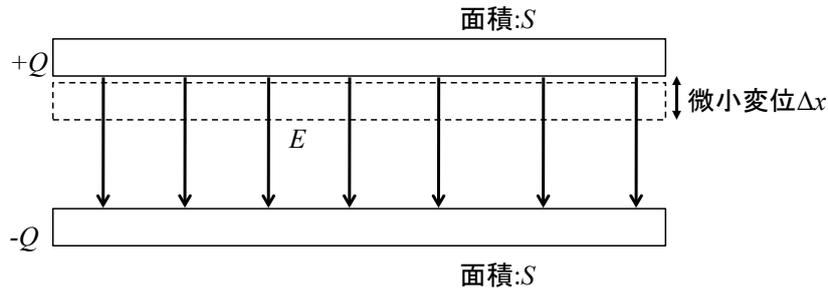


図 1: クーロン力によって微小変位 Δx だけずれた場合

図 1 のような体系を考えると，導体はクーロン力 F によって Δx 動くことになる．この場合，極板間にある静電エネルギーはクーロン力によって両極板を引き付け合うようにエネルギーを使う．今の場合，静電エネルギーは極板を引き付け合うためにだけ消費されるので，もともとあったエネルギーが減った分は極板がする仕事 δW の符号を変えたものになる．この時減った分のエネルギー $-\Delta W$ は $F\Delta x = -\Delta W$ より，

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} \quad (6)$$

である．今，図 1 の両導体に外部から電荷の供給がなく，電荷量が時間的に一定であるとすると，この力は先に述べたように蓄えられている静電エネルギーが減るように作用する．このコンデンサの静電容量を $C[\text{F}]$ とすると，静電エネルギー ΔW は式 (4) から，

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right) \\ &= \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{d - \Delta x}{\epsilon_0 S} - \frac{d}{\epsilon_0 S} \right) \\ &= -\frac{Q^2}{2} \frac{\Delta x}{\epsilon_0 S} \end{aligned} \quad (7)$$

となる．これを式 (6) に代入すると，

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} [\text{N}] \quad (8)$$

となり，コンデンサ間に電荷を置いた場合，この大きさの力を受ける．

4 演習問題

- [練習 1] 教科書 [1]p.50, 例題 3・8
- [練習 2] 教科書 [1]p.58, 例題 3・9
- [練習 3] 教科書 [1]p.53, 演習問題 3.1~3.13

参考文献

- [1] 安達三郎, 大貫繁雄 基礎電気・電子工学シリーズ1”電気磁気学” 森北出版株式会社
- [2] 大貫繁雄/安達三郎 演習基礎電気・電子工学シリーズ”演習 電気磁気学” 森北出版株式会社
- [3] 山田直平, 桂井誠 ”電気磁気学問題演習詳解” 電気学会大学講座 電気学会