差分法によるラプラス方程式の解法
プログラム作成編

電気情報工学科 * 5 年　コンピュータシミュレーション
後期第 10,11 回目（通期 26,27 回目）

概 要

二次元ラプラス方程式の差分式の導出から，プログラム作成の方針について解説する．

1　差分法による偏微分方程式の数値計算

1.1　差分方程式の導出

二次元のラプラス方程式を数値計算で近似解を求めることを考える．まずは，解 $\phi(x,y)$ をテイラー展開する．x，y 方向に微小変位 $\pm h$ があった場合のポテンシャルは，

$$\phi(x+h,y) = \phi(x,y) + \frac{\partial\phi}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}h^4 + \cdots \tag{1}$$

$$\phi(x-h,y) = \phi(x,y) - \frac{\partial\phi}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}h^4 - \cdots \tag{2}$$

となる．これらの式の辺々を足し合わせると，

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{h^2}\left[\phi(x+h,y) - 2\phi(x,y) + \phi(x-h,y)\right] - O(h^2) \tag{3}$$

が得られる．このことから，2 階の偏導関数の値は微小変位 h の場所の関数の値を用いて，h^2 の精度で近似計算ができることが分かる．すなわち，式 (3) の右辺の第 1 項を計算すればよいのである．同じことを y 方向についても行うと

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{h^2}\left[\phi(x,y+h) - 2\phi(x,y) + \phi(x,y-h)\right] - O(h^2) \tag{4}$$

*独立行政法人　国立高等専門学校機構　秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

が得られる．

これらの式 (3) と (4) を元の 2 次元ラプラス方程式 (**??**) に代入すれば，

$$\phi(x+h,y)+\phi(x-h,y)+\phi(x,y+h)+\phi(x,y-h)-4\phi(x,y)=0 \tag{5}$$

となる．これが，2 次元ラプラス方程式の差分式である．この式をよく見ると，座標 (x,y) のポテンシャルの値 $\phi(x,y)$ は，周りの値の平均であることがわかる．

実際にこの式を数値計算する場合，図 2 のように格子状[1]に区切り，その交点での値を求めることになる．ここでは，x および y 方向には等間隔 h で区切り計算を進めるが，等間隔である必要はない．そのようにしても差分の方程式は複雑になるが，同じような計算は可能である．これまでの説明が理解できていれば，x と y 方向の間隔が異なっても，式 (5) に対応する差分式は作れる．

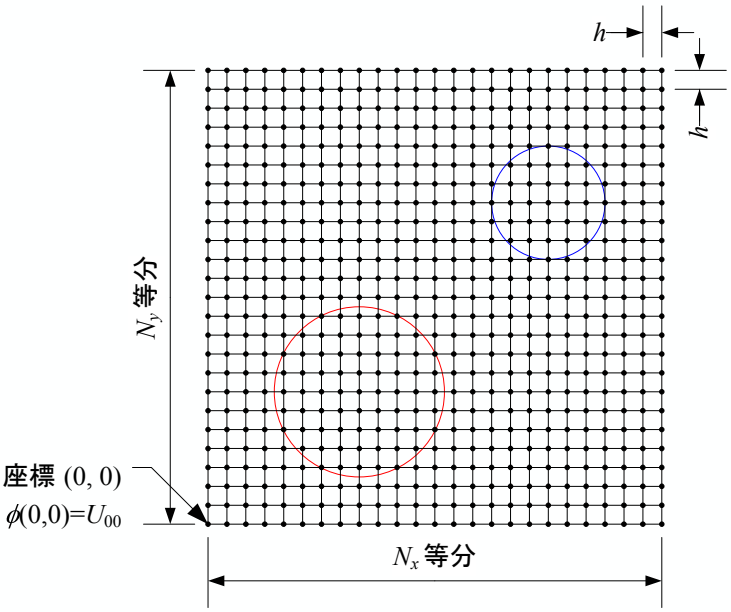

図 1: 解くべき領域を格子に分割

数値計算をする場合，$\phi(x,y)$ や $\phi(x+h,y)$ の形は不便なので，形式を改める．図 1 の左下の座標を (0,0) として，格子点でのポテンシャルを

$$\begin{aligned}\phi(x,y)&=\phi(ih,jh)\\&=U_{ij}\end{aligned} \tag{6}$$

とする．このようにすると，式 (5) は

$$U_{i+1\,j}+U_{i-1\,j}+U_{i\,j+1}+U_{i\,j-1}-4U_{i\,j}=0 \tag{7}$$

[1] この格子のことをメッシュ(mesh) と言う事もある．

となり，数値計算し易い形になる．このようにした場合の各格子点の様子を図 2 に示す．

次の節で述べる境界条件を考えないとすると，ラプラス方程式は式 (7) の連立方程式を解くだけである．格子に領域を分割することにより，難しい偏微分方程式が連立方程式の問題に置き換えられたわけである．

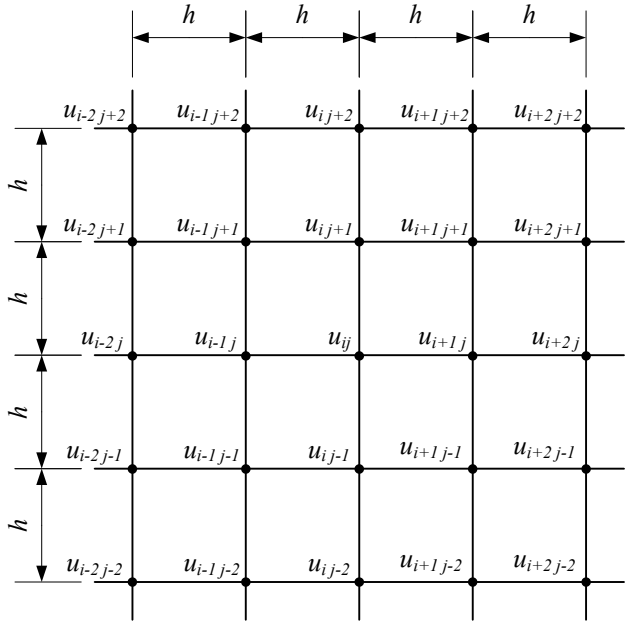

図 2: 差分の格子

1.2 境界条件 (外周)

実際に，連立方程式 (7) を計算する場合，困った問題が生じる．このままだと，式の数と未知数の数が合わないのである．たとえば，図 3 に示す境界を考える．すると，境界が式 (7) の $(i,\ j)$ になる場合，式が作れないのである．すると，図 2 の中の電極が無い場合，可能な連立方程式の数は，$(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ 個である．未知数の数は，$(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ 個である．未知数の数の方が，$2(N_x + N_y)$ 個多いのである．そのため，予め，この余分の未知数となっている値を決めなくてはならない．実際これは，偏微分方程式の境界条件を決めることに相当する．

そこで，境界上の格子点 $2(N_x + N_y)$ 個の値を予め決める．こうすれば，式の数を減らさないで，未知数の数を減らすことができる．要するに偏微分方程式を解くときの境界条件を決めるのと同じである．(外周部 (境界条件) の格子点の数が，ちょうど，不足している方程式の数と同じなのである．)

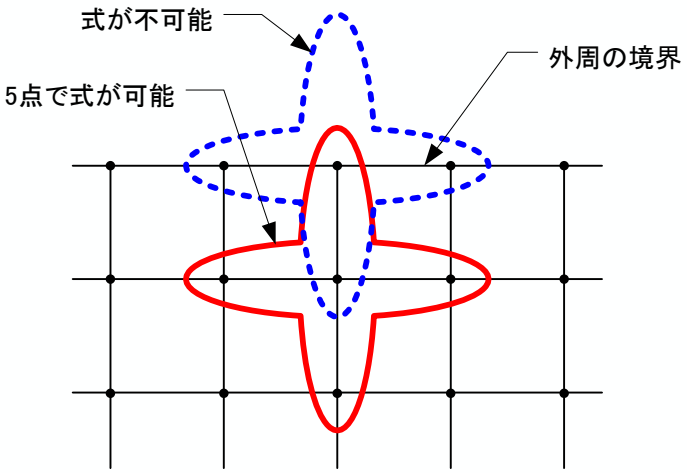

図 3: 境界付近の差分方程式の可能性

1.3 境界条件 (内部の電極)

先ほどの説明通り内部の格子点のポテンシャルを決めてしまうと，その数だけ方程式が減少する．したがって，必要なだけ内部のポテンシャルを決めても，式と未知数の数は同じで，連立方程式は解ける．そのような理由で，図 2 の電極内部の格子点のポテンシャル U_{ij} は，問題で与えられたとおり，30V と-20V と固定しても，連立方程式の数は変わらない．

2 連立方程式の計算

2.1 ガウス・ザイデル法

境界条件，境界でのポテンシャルの値を決めることで，方程式と未知数の数が一致する．したがって，連立方程式を解くことで，格子点のポテンシャルが求まることになる．以下の反復計算により解を求める．

1. 外周の境界上の格子点のポテンシャルの値を U_{ij} に代入する．この値は，これ以降，ずっと一定とする．

2. 電極の内部の格子点のポテンシャルの値を U_{ij} を代入する．この値も，これ以降，ずっと一定とする．

3. 計算すべき内部の格子点のポテンシャルを，

$$U_{i\,j} = \frac{1}{4}\left[U_{i+1\,j} + U_{i-1\,j} + U_{i\,j+1} + U_{i\,j-1}\right] \tag{8}$$

に従い計算する．

4. $U_{i\,j}$ が収束するまで，繰り返し，式 (8) を計算する．

この方法で無限の回数ループ処理をすれば，対角優位行列なので真の解に収束するはずである．

2.2 一定ポテンシャル値の決め方

ある注目している格子点が，ポテンシャルが固定されている内部電極の内側にあるか否か判断しなくてはならない．内部にあるとそれは固定点で，先に示したガウス・ザイデル法で値を変えてはならない．一方，外部だと境界でない限り，ガウス・ザイデル方で収束するまで，計算を繰り返すことになる．そのようなことから，電極内部にあるか否かは予め判断する必要がある．その判断は簡単である．格子点と電極中心の距離と電極半径を比べれば良い．

2.3 固定及び境界点の計算を省略する方法

固定電極内部の点や外部の境界の格子点では，ガウスザイデル方で計算する必要がない．それを計算しないようにプログラムを書かなくてはならない．境界の計算を省くのは簡単である．境界の格子点のポテンシャルは，$i = 0, i = N_x, j = 0, j = N_y$ の場合である．この場合，ガウス・ザイデル法で式 (8) の $U_{i\,j}$ を計算しなければ良い．

次に，電極内部の点であるが，これは予め目印を付ければ良い．例えば，整数型の配列を用意して，その値が 1 の場合は，電極の内部と目印をしておく．1 以外の時，式 (8) の $U_{i\,j}$ を計算する．

以上をまとめると，連立方程式を解く場合には，次のようなループとすれば良い．

```
for(k=1; k<=ガウス・ザイデル法の計算回数;k++){
  for(j=1; j<= x 方向の分割数-1 ; j++){
    for(i=1; i<= y 方向の分割数-1 ;i++){
      if(フラグ[i][j] != 1){
        u[i][j]=0.25*(u[i][j-1]+u[i][j+1]+u[i-1][j]+u[i+1][j]);
      }
    }
  }
}
```

このループを図 4 に示す．先のループがどのように計算されるか，よく考えみてほしい．

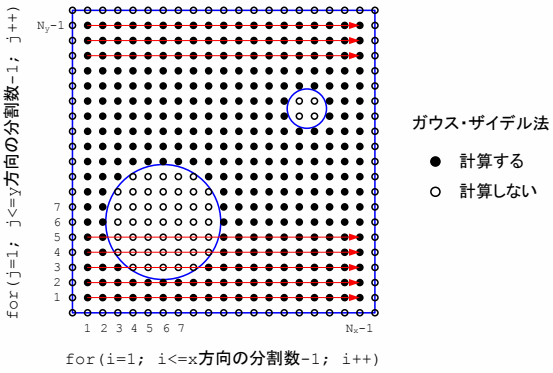

図 4: 計算する格子点と順序

3　練習問題 (例題)

3.1　ポテンシャルの計算

ポテンシャル分布を求めるプログラムを作成してみる．ただし，詳細な寸法は，図 5 の通りとする．

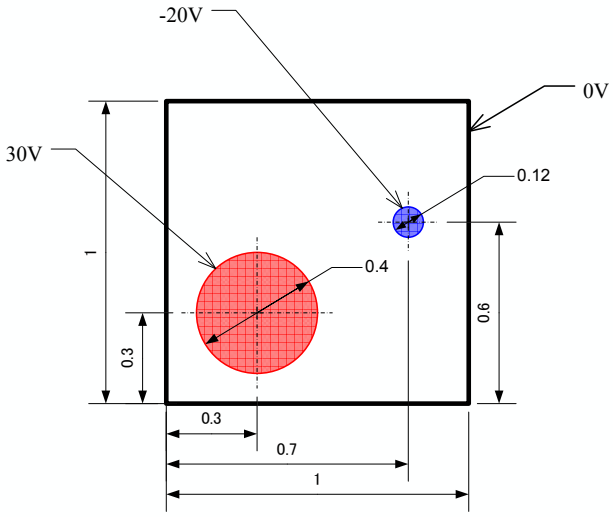

図 5: 練習問題の境界条件とポテンシャル

3.2 穴埋め問題

途中まで作成したソースプログラムを，研究室ホームページ[2]からダウンロードし，穴埋め形式でプログラム作成すること．ただし，全体が理解できるように，各自でコメント文をいれること．

変数　このヒントのプログラムの変数は，次のように使われている．

u[i][j]　i,j 番目の格子点のポテンシャルを入れる配列
x[i][j],y[i][j]　i,j 番目の格子点の座標を入れる配列
flag[i][j]　i,j 番目の格子点について，固定のポテンシャルか否かをきめるフラグ (目印)．固定の場合には 1，計算により求める場合には 0 とする．具体的には，格子点が内部電極内あるいは境界上ならば 1，それ以外は 0 とする．
iteration　ガウス・ザイデル法での最大計算回数
nlat　x 方向と y 方向の分割数．問題が正方形領域なので，同一としている．

ユーザー定義関数　また，使われている関数の動作は以下の通りである．

initialize　ポテンシャルとフラグの値をゼロに初期化する．
set_cordinate　格子点の座標を設定する．
set_boundary_wall_pot　外部境界の格子点のポテンシャルを 0，フラグを 1 に設定する．
set_circle　電極内部の格子点のポテンシャルを設定する．さらにそのフラグを 1 に設定する．

[2] http://akita-nct.jp/saka/Lecturenote/lecture/5e/5e.html

4　レポート

練習問題のポテンシャルの数値計算に基づいて，各自ポテンシャル形状を好きなように変形させ，ポテンシャル分布を解析する．例題と同じポテンシャル分布の計算をした場合はゼロ点とする．

レポートは実験報告書と同様のフォーマットとし，はじめに差分法の数値解析についての計算原理を述べ，その後に各自が行った解析対象のモデルを示し，計算結果と考察を述べること．プログラムリストは付録として載せることとする．

期限	1 月 13 日 (金)17:00 まで
用紙	A4
提出場所	坂本研究室の入口のポスト
表紙	表紙を 1 枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること．
	授業科目名「コンピュータシミュレーション」
	課題名「差分法によるラプラス方程式の解法」
	5E　学籍番号　氏名
	提出日