

Maxwell 方程式

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{アンペールの法則}$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{ファラデーの電磁誘導の法則}$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad \text{電場におけるガウスの法則}$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{磁場におけるガウスの法則}$$

・媒質方程式(構成方程式)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Maxwell の方程式から次の波動方程式が導かれる(ただし、電荷が生じないものとする)。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

偏波

電磁波(光)の偏波(偏光)を考える。今、z 方向に平面波が伝搬していくと考えると、電界および磁界の振動方向は進行方向に垂直な方向となる (Fig.1)。ここで、電界の方向(偏光面)が紙面に対して垂直な場合 (Fig.2) と平行な場合 (Fig.3) とでわけるとそれぞれの電磁界成分は次のようになる。

$$\text{TE 波: } (0, E_y, 0) \quad (H_x, 0, H_z)$$

$$\text{TM 波: } (E_x, 0, E_z) \quad (0, H_y, 0)$$

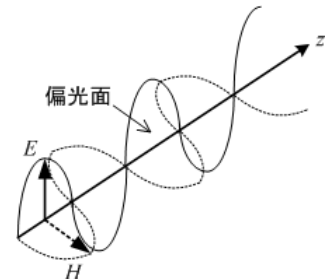


Fig.1 電磁波の伝搬

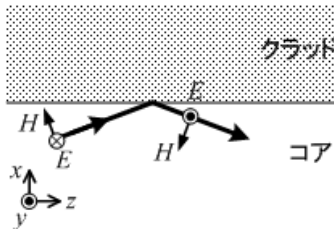


Fig.2 TE 波(s 偏波)

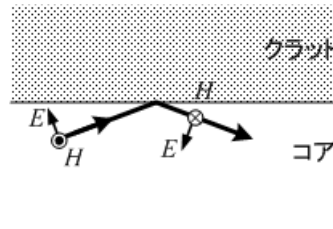


Fig.3 TM 波(p 偏波)

2-3 誘電体スラブ導波路

Fig.4 に示すようなコアをクラッドで挟んだ平板の 3 層構造(スラブ導波路 slab waveguides)を考える。この構造は実際にはほとんど使用されないが、2 次元のみで取り扱えるため解析が容易である。今、光波の電磁界が $e^{j(\omega t - \beta z)}$ で変化しているものとする、波動方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \mathbf{H} = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \quad (2.20)$$

と表される。ただし、 $\gamma^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \sigma \mu$ である。

・ TE モードを考える(電界 $\mathbf{E}(0, E_y, 0)$ 、磁界 $\mathbf{H}(H_x, 0, H_z)$ すなわち、 $E_x = E_z = H_y = 0$)。

E_y 成分は(2.18)式から

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \gamma^2 E_y = 0 \quad \cdots \textcircled{3} \quad (2.21)$$

z 方向の伝搬定数を β とする(z 方向に伝搬)と、 $e^{-j\beta z}$ の波として考えればよいので、 $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -j\beta$ 、

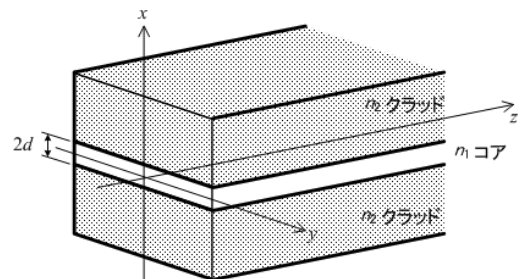


Fig.4 スラブ導波路

$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow -\beta^2$ となる。また、スラブ導波路が y 方向に変化なしと考えると、 $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0$ となるので、

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \beta^2 E_y + \gamma^2 E_y = 0$$

今、損失を考慮しないと、 $\sigma = 0$ として、 $\gamma^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \sigma = \omega^2 \mu \varepsilon = k_0^2 n^2$ 。よって

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad \cdots \textcircled{4} \quad (2.22)$$

(1) コア内部 ($|x| \leq d$)

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) E_y = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \chi_1^2 E_y = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

(2) クラッド内部 ($x \geq d, x \leq -d$)

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - (\beta^2 - k_0^2 n_2^2) E_y = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \alpha_2^2 E_y = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

ここで、

$$\chi_1^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \quad \cdots (2.25)$$

$$\alpha_2^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \quad \cdots (2.31)$$

微分方程式の解は

(1) コア内部

$$E_y = A \cos(\chi_1 x) + B \sin(\chi_1 x) \quad \cdots \textcircled{7}$$

(2) クラッド内部

$$E_y = C \exp(-\alpha_2 x) + D \exp(\alpha_2 x)$$

$$x \geq +d \text{ のとき} \quad E_y = C \exp(-\alpha_2 x) \quad \cdots \textcircled{8}$$

$$x \leq -d \text{ のとき} \quad E_y = D \exp(\alpha_2 x) \quad \cdots \textcircled{9}$$

ここで、規格化周波数 V (V 値) を定義する。

$$V = \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)} k_0 d = \sqrt{2\Delta n_1} \frac{2\pi}{\lambda} d \quad \cdots \textcircled{10}$$

電界に対する境界条件: $E_y(\text{core})|_{x=d} = E_y(\text{cladding})|_{x=d}$ より

$$\text{偶モード: } C = A \cos(\chi_1 d) \exp(-\alpha_2 d) \rightarrow E_y = A \cos(\chi_1 d) \exp(-\alpha_2 (x - d)) \quad \cdots \textcircled{11}$$

境界条件(磁界): $H_z(\text{core})|_{x=d} = H_z(\text{cladding})|_{x=d} \rightarrow \frac{\partial E_y(\text{core})}{\partial x}|_{x=d} = \frac{\partial E_y(\text{cladding})}{\partial x}|_{x=d}$ より

$$\frac{\sin \chi_1 d}{\cos \chi_1 d} = \tan \chi_1 d = \frac{\alpha_2}{\chi_1} \quad \cdots (2.37)$$

V の定義式 ($V^2 = (\chi_1 d)^2 + (\alpha_2 d)^2$) より

$$\frac{\alpha_2}{\chi_1} = \sqrt{\frac{V^2}{(\chi_1 d)^2} - 1} = \tan \chi_1 d \quad : \quad \text{固有値方程式(TE 偶モード)} \quad \cdots (2.42)$$

奇モード: $C = B \sin(\chi_1 d) \exp(\alpha_2 d) \rightarrow E_y = B \sin(\chi_1 d) \exp(-\alpha_2 (x - d))$

磁界の連続条件 $\frac{\partial B \sin(\chi_1 d)}{\partial x}|_{x=d} = \frac{\partial B \sin(\chi_1 d) \exp(-\alpha_2 (x - d))}{\partial x}|_{x=d}$ より

$$\frac{\sin \chi_1 d}{\cos \chi_1 d} = \tan \chi_1 d = -\frac{\chi_1}{\alpha_2} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{V^2}{(\chi_1 d)^2} - 1}} \quad \text{固有値方程式(TE 奇モード)} \quad \cdots (2.43)$$