

波動方程式

Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

電磁波の波動方程式は上記の Maxwell の方程式より

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{H} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

と求められる。z 方向に伝搬する平面波を考えると、解は

$$\mathbf{E} = E_0 \exp\{j(kx - \omega t)\}$$

と表すことができる。ここで、 k は波数、 ω は角周波数である。また、位相速度は $v = \omega/k$ で表さ

れる。解を波動方程式に代入して速度 v を求めると

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} = v^2 \quad \text{より} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

となる。物質中の位相速度は

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{n}$$

と表される。ここで、 n は物質の屈折率である。

いま、 $E_z = H_z = 0$ 、 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ であるので、 $E_x = E_0 \exp\{j(kx - \omega t)\}$ とすると

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega \mu H_y$$

これより、物質の固有インピーダンス ξ は次のようになる。

$$\xi = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

電磁波のエネルギー

平面波の伝搬する方向は $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の方向であるので、 $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ を考えると、

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

となる。 w は磁気エネルギー密度と電気エネルギー密度の和である。ある体積 V について積分すると次のようになる。

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dv = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) ds + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

上式の左辺は体積 V 内で単位時間に生じるエネルギーの減少分、右辺第 1 項は単位時間に V の表面 S を通って外部に放射されるエネルギー、第 2 項は単位時間に熱となって失われるエネルギーを示す。

また、単位面積を通して単位時間に流動するエネルギーを示すポインティングベクトル (Poynting vector) \mathbf{P} は

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

で表される。

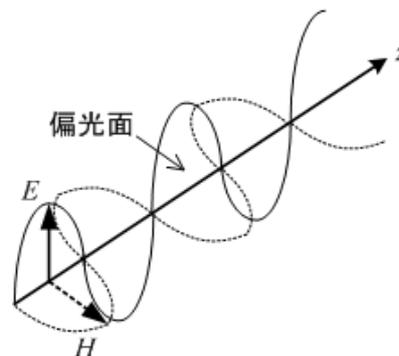


Fig.1 電磁波の伝搬