

**Maxwell 方程式****・電場におけるガウスの法則**

クーロンの法則 
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ee'}{r^2}$$

点電荷  $e$  による電界  $E$  
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \quad \rightarrow \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{e}{\epsilon_0}$$

電荷  $e$  を中心とする半径  $r$  の球体積  $V$  の空間電荷密度を  $\rho$  とすると

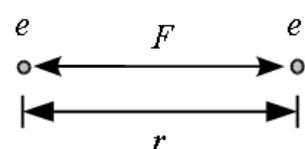
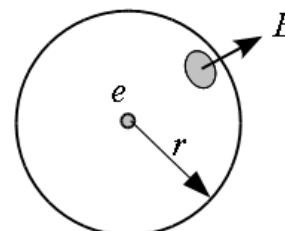
$$\int_S E \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dv$$

ガウスの発散の定理より

$$\int_V \text{div} E \cdot dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dv$$

任意の  $V$  について成立  $\rightarrow \quad \text{div} E - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$$\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Fig.1 クーロン力  $F$ Fig.2 球体積による電界  $E$ **・磁場におけるガウスの法則**

磁荷（単磁極）は存在しないので

$$\text{div} B = 0$$

**・アンペールの法則**

電流  $I$  によって生ずる磁束密度  $B$

$$\int_C B(r) \cdot dr = \mu_0 \int_S J \cdot ds$$

ストークスの定理より

$$\int_S \text{rot} B \cdot ds = \mu_0 \int_S J \cdot ds$$

任意の  $S$  について成立  $\rightarrow \quad \text{rot} B = \mu_0 J$

$$\text{rot} H = J$$

電荷密度が時間的に変化する系では変位電流の項が付く

$$\text{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

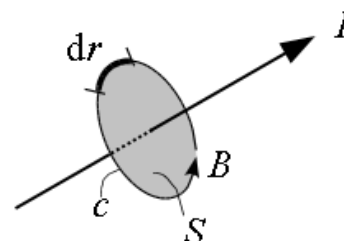


Fig.3 電流による磁場

**・ファラデーの電磁誘導**

磁束  $\Phi$  の時間変化によって電圧  $V$  が生ずる

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\Phi = \int_S B \cdot ds)$$

$$\int_C E \cdot dr = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot ds$$

ストークスの定理より

$$\int_S \text{rot} E \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot ds$$

任意の  $S$  について成立

$$\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

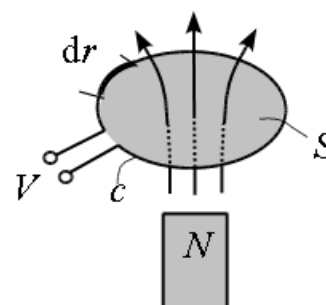


Fig.4 電磁誘導

**波動方程式**

Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & \text{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{div}\mathbf{B} &= 0 & \text{div}\mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

電磁波の波動方程式は上記の Maxwell の方程式より

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{E} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2\mathbf{H} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

と求められる。 $z$  方向に伝搬する平面波を考えると、解は

$$\mathbf{E} = E_0 \exp\{j(kx - \omega t)\}$$

と表すことができる。ここで、 $k$  は波数、 $\omega$  は角周波数である。また、位相速度は  $v = \omega/k$  で表される。解を波動方程式に代入して速度  $v$  を求めると

$$\omega^2/k^2 = 1/\varepsilon\mu = v^2 \quad \text{より} \quad v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

となる。物質中の位相速度は

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = c_0/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} = c_0/n$$

と表される。ここで、 $n$  は物質の屈折率である。

いま、 $E_z = H_z = 0$ 、 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$  であるので、 $E_x = E_0 \exp\{j(kx - \omega t)\}$  とすると

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y$$

これより、物質の固有インピーダンス  $\xi$  は次のようになる。

$$\xi = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

**電磁波のエネルギー**平面波の伝搬する方向は  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  の方向であるので、 $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  を考えると、

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

となる。 $w$  は磁気エネルギー密度と電気エネルギー密度の和である。ある体積  $V$  について積分すると次のようになる。

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dv = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) ds + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

上式の左辺は体積  $V$  内で単位時間に生じるエネルギーの減少分、右辺第 1 項は単位時間に  $V$  の表面  $S$  を通って外部に放射されるエネルギー、第 2 項は単位時間に熱となって失われるエネルギーを示す。

また、単位面積を通して単位時間に流動するエネルギーを示すポインティングベクトル (Poynting vector)  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

で表される。

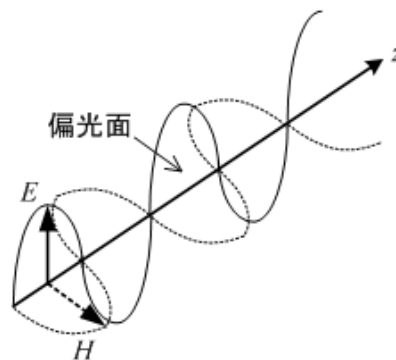


Fig.5 電磁波の伝搬